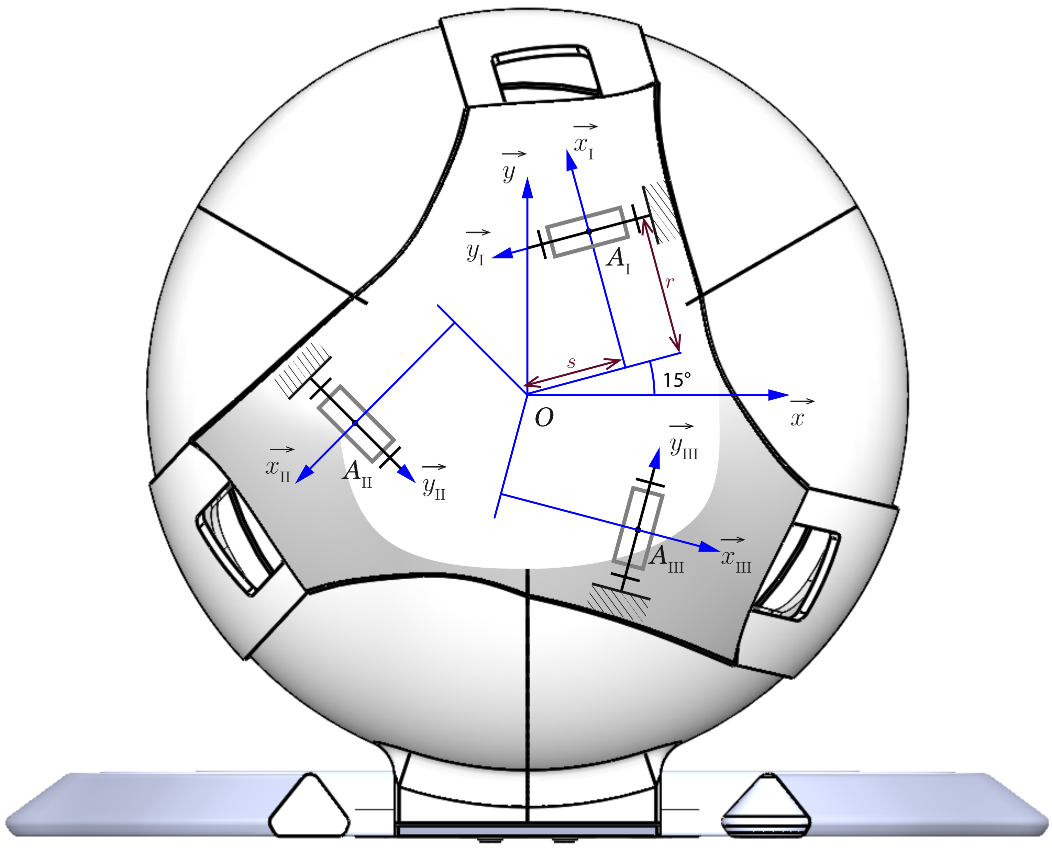
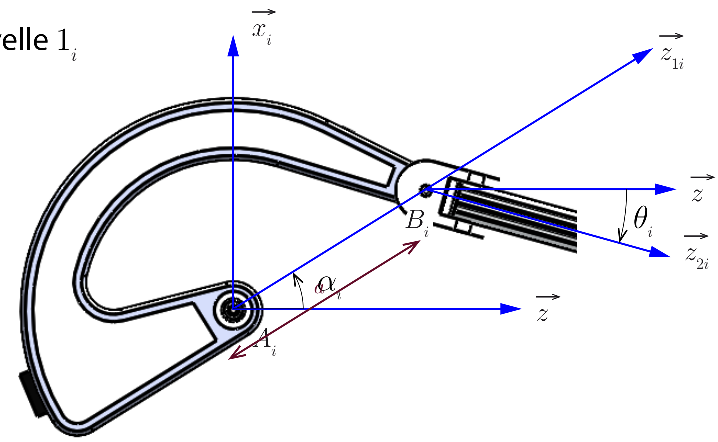
Robot Haptique Falcon - Modèle mécanique

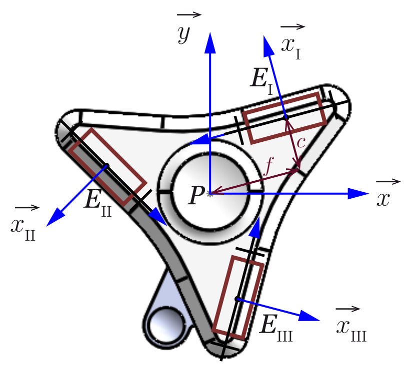
Bâti 0 : positions des liaisons pivot avec les manivelles



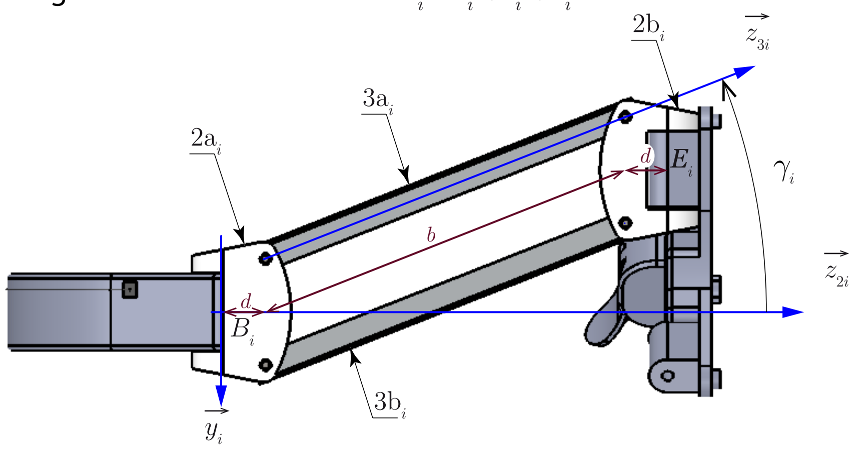
Manivelle 1_i



Effecteur 4



Parallélogramme de transmission $2a_i$-$2b_i$-$3a_i$-$3b_i$

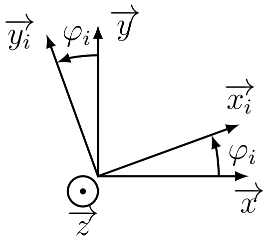


1 Notations utilisées

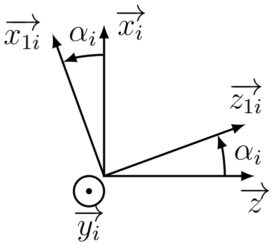
L'interface haptique est assimilable à un robot à structure parallèle formée de trois bras, notés I, II et III, identiques d'un point de vue mécanique, mais décallés de 120°. L'indice i fait référence au numéro du bras. Les solides sont notés :

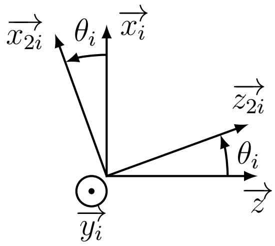
0 :	bâti, auquel sont associés 4 repères $\Re = (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ et $\Re_i = (0, \overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z})$
1_i :	manivelle motorisée
$2a_i$ et $2b_i$:	pièce de jonction (x2 par bras)
$3a_i$ et $3b_i$:	barre de parallèlogramme (x2 par bras)
4 :	Effecteur ou poignée

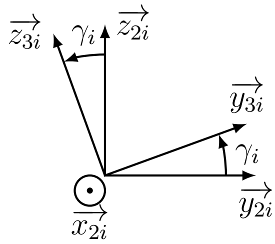
2 Modèle géométrique



$$\begin{aligned} \varphi_I &= 105° \\ \varphi_{II} &= -15° \\ \varphi_{III} &= 225° \end{aligned}$$







Par fermeture de chaine géométrique selon chaque bras (les vecteurs sont exprimés dans $\Re_i$)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{B_iC_i} + \overrightarrow{C_iD_i} + \overrightarrow{D_iE_i} + \overrightarrow{E_iP} \\
\overrightarrow{A_iB_i} &= a \begin{pmatrix} \sin\alpha_i \\ 0 \\ \cos\alpha_i \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{B_iE_i} &= 2d\overrightarrow{z_{2i}} + b\overrightarrow{z_{3i}} \\
&= 2d \begin{pmatrix} \sin\theta_i \\ 0 \\ \cos\theta_i \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \cos\gamma_i \sin\theta_i \\ -\sin\gamma_i \\ \cos\gamma_i \cos\theta_i \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{OP} &= \begin{pmatrix} r \\ -s \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \sin\alpha_i \\ 0 \\ \cos\alpha_i \end{pmatrix} + 2d \begin{pmatrix} \sin\theta_i \\ 0 \\ \cos\theta_i \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \cos\gamma_i \sin\theta_i \\ -\sin\gamma_i \\ \cos\gamma_i \cos\theta_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ f \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r + a\sin\alpha_i + 2d\sin\theta_i + b\cos\gamma_i\sin\theta_i - c \\ -s - b\sin\gamma_i + f \\ a\cos\alpha_i + 2d\cos\theta_i + b\cos\gamma_i\cos\theta_i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} u_i &= X\cos\varphi_i + Y\sin\varphi_i \\ v_i &= -X\sin\varphi_i + Y\cos\varphi_i \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \arcsin\frac{v_i + s - f}{-b} && (1) \\ \sin\theta_i\left(2d + b\cos\gamma_i\right) &= u_i - r + c - a\sin\alpha_i && (2) \\ \cos\theta_i\left(2d + b\cos\gamma_i\right) &= Z - a\cos\alpha_i && (3) \\ \left(2d + b\cos\gamma_i\right)^2 &= \left(u_i - r + c\right)^2 + a^2 + Z^2 - 2a\left(u_i - r + c\right)\sin\alpha_i - 2aZ\cos\alpha_i && (4) \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned} A &= 2aZ \\ B &= 2a\left(u_i - r + c\right) \\ C &= \left(u_i - r + c\right)^2 + a^2 + Z^2 - \left(2d + b\cos\gamma_i\right)^2 \end{aligned}$$

$$A\cos\alpha_i + B\sin\alpha_i = C$$

Posons :

$$\begin{aligned} t_i &= \tan\frac{\alpha_i}{2} \\ \sin\alpha_i &= \frac{2t_i}{1 + t_i^2} \\ \cos\alpha_i &= \frac{1 - t_i^2}{1 + t_i^2} \end{aligned}$$

$$t_i^2\left(A + C\right) - 2Bt_i + \left(C - A\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4B^2 - 4\left(A + C\right)\left(C - A\right) \\ t_i &= \frac{2B \pm \sqrt{\Delta}}{2\left(A + C\right)} \\ \alpha_i &= 2\arctan t_i \end{aligned}$$

(l'indétermination de signe implique deux solutions possibles de α_i. Seule l'une est accessible avec le robot étudié : $t_i = \frac{2B+\sqrt{\Delta}}{2(A+C)}$)

Enfin, par le rapport (2)/(3) :

$$\theta_i = \arctan\frac{u_i - r + c - a\sin\alpha_i}{z - a\cos\alpha_i}$$

3 Relations cinématiques : expression de la matrice Jacobienne

3.1 Rappel : matrice Jacobienne

Notations utilisées :

$$\{q\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{x\} = \left\{ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \right\}$$

On appelle la matrice Jacobienne la matrice qui lie $\{\dot{x}\}$ et $\{\dot{q}\}$:

$$\{\dot{x}\} = [J] \cdot \{\dot{q}\}$$

Il est aussi possible d'utiliser l'expression cinématique :

$$[J_F] \cdot \{\dot{x}\} = [J_I] \cdot \{\dot{q}\}$$

3.2 Expression de $[J_I]$ et $[J_F]$

Ces deux matrices peuvent être déterminées par la dérivée des relations géométriques. Par fermeture de chaine géométrique pour chaque bras :

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_iB_i} & = & \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PE_i} + \underbrace{\overrightarrow{E_iD_i} + \overrightarrow{D_iC_i} + \overrightarrow{C_iB_i}}_{-\left(b\overrightarrow{z_{3i}}+2d\overrightarrow{z_{2i}}\right)} \\
\dot{\alpha}_i\overrightarrow{y_i} \wedge a\overrightarrow{z_{1i}} & = & \overrightarrow{V}(P/0) + \overrightarrow{0} - \left(\dot{\theta}_i\overrightarrow{y_i} + \dot{\gamma}\overrightarrow{x_{2i}}\right) \wedge \left(b\overrightarrow{z_{3i}}\right) - \dot{\theta}_i\overrightarrow{y_i} \wedge 2d\overrightarrow{z_{2i}} \\
a\dot{\alpha}_i\overrightarrow{x_{1i}} & = & \dot{u}\overrightarrow{x_i} + \dot{v}\overrightarrow{y_i} + \dot{Z}\overrightarrow{z} - b\cos\gamma_i\dot{\theta}_i\overrightarrow{x_{2i}} + b\dot{\gamma}_i\overrightarrow{y_{3i}} - 2d\dot{\theta}_i\overrightarrow{x_{2i}}
\end{array}$$

Exprimé dans $\Re_i$:

$$a\cos\alpha_i\dot{\alpha}_i = \dot{u}_i + A\dot{\theta}_i + B\dot{\gamma}_i \tag{5}$$

$$0 = \dot{v}_i + 0 + \dot{\gamma}_i\left(b\cos\gamma_i\right) \tag{6}$$

$$-a\sin\alpha_i\dot{\alpha}_i = \dot{Z} + C\dot{\theta}_i + D\dot{\gamma}_i \tag{7}$$

avec :

$$\begin{array}{rcl}
A & = & -\left(b\cos\gamma_i + 2d\right)\cos\theta_i \\
B & = & b\sin\gamma_i\sin\theta_i \\
C & = & \left(b\cos\gamma_i + 2d\right)\sin\theta_i \\
D & = & b\sin\gamma_i\cos\theta_i
\end{array}$$

Par l'équation (6), avec $\gamma_i \neq \pm\frac{\pi}{2}$:

$$\dot{\gamma}_i = -\frac{\dot{v}_i}{b\cos\gamma_i}$$

De plus, avec $(b\cos\gamma + 2d) \neq 0$: $C\,(5) - A\,(7)$:

$$a\dot{\alpha}_i\left(\cos\alpha_i C + \sin\alpha_i A\right) = C\dot{u}_i + BC\dot{\gamma}_i - A\dot{Z} - AD\dot{\gamma}_i$$

$$a\dot{\alpha}_i\left(\cos\alpha_i\sin\theta_i - \sin\alpha_i\cos\theta_i\right) = \dot{u}_i\sin\theta_i - \dot{v}_i\tan\gamma_i\sin^2\theta_i + \dot{Z}\cos\theta_i - \dot{v}_i\tan\gamma_i\cos^2\theta_i$$

$$a\dot{\alpha}_i\sin\left(\theta_i - \alpha_i\right) = \dot{u}_i\sin\theta_i - \dot{v}_i\tan\gamma_i + \dot{Z}\cos\theta_i$$

Multiplié par $\cos\gamma_i$:

$$a\dot{\alpha}_i\sin\left(\theta_i - \alpha_i\right)\cos\gamma_i = \dot{u}_i\sin\theta_i\cos\gamma_i - \dot{v}_i\sin\gamma_i + \dot{Z}\cos\theta_i\cos\gamma_i$$

avec :

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \dot{X}\cos\varphi_i + \dot{Y}\sin\varphi_i \\ \dot{v}_i &= -\dot{X}\sin\varphi_i + \dot{Y}\cos\varphi_i \end{aligned}$$

$$\left[a\sin\left(\theta_i - \alpha_i\right)\cos\gamma_i\right]\left\{\dot{\alpha}_i\right\} = \begin{bmatrix} j_{xi} & j_{yi} & j_{zi} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{Bmatrix}$$

Avec

$$\begin{aligned} j_{xi} &= \cos\varphi_i\sin\theta_i\cos\gamma_i + \sin\varphi_i\sin\gamma_i \\ j_{yi} &= \sin\varphi_i\sin\theta_i\cos\gamma_i - \cos\varphi_i\sin\gamma_i \\ j_{zi} &= \cos\theta_i\cos\gamma_i \\ j_{\alpha i} &= a\sin\left(\theta_i - \alpha_i\right)\cos\gamma_i \end{aligned}$$

En généralisant aux trois bras :

$$[J_F]\cdot\{\dot{x}\} = [J_I]\cdot\{\dot{q}\}$$

$$[J_I] = \begin{bmatrix} j_{\alpha I} & 0 & 0 \\ 0 & j_{\alpha II} & 0 \\ 0 & 0 & j_{\alpha III} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [J_F] = \begin{bmatrix} j_{xI} & j_{yI} & j_{zI} \\ j_{xII} & j_{yII} & j_{zII} \\ j_{xIII} & j_{yIII} & j_{zIII} \end{bmatrix}$$

$$[J] = [J_F]^{-1}\cdot[J_I]$$

4 Loi de transmission en effort

La matrice jacobienne $[J]$ permet de lier les vitesses articulaires $\{\dot{q}\}$ aux vitesses de l'effecteur $\{\dot{x}\}$:

$$\{\dot{x}\} = [J] \cdot \{\dot{q}\}$$

De même, la loi de transmission des actions mécaniques en quasi-statique peut se déterminer par un bilan énergétique lors de petits déplacements (à énergie cinétique constante). En notant $\{F\}$ le vecteur effort de l'utilisateur sur la poignée et $\{C\}$ le vecteur formé par les couples sur chacun des bras :

$$\begin{aligned}
\delta W_e &= \delta W_s \\
\{dq\}^\top \cdot \{C\} &= \{dx\}^\top \cdot \{F\} \\
\{dq\}^\top \cdot \{C\} &= ([J] \cdot \{dq\})^\top \cdot \{F\} \\
\{dq\}^\top \cdot \{C\} &= \{dq\}^\top \cdot [J]^\top \cdot \{F\} \\
\{C\} &= [J]^\top \cdot \{F\}
\end{aligned}$$

