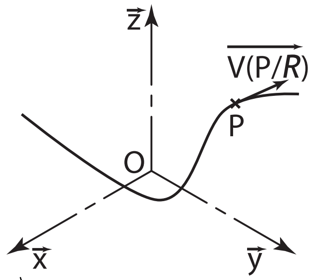
CINEMATIQUE DES SOLIDES

1 Rappels : cinématique du point

1.1 Vitesse d'un point

Le vecteur vitesse du point $P(t)$ dans son mouvement par rapport à $\Re$, à la date t, est la dérivée par rapport au temps du vecteur position, pour un observateur lié à $\Re$.

$$\overrightarrow{V}(P/\Re) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\bigg|_{\Re}$$



L'unité de la norme est le mètre par seconde, m/s.

Si P est un point géométrique, on note la vitesse de P : $\overrightarrow{V}(P/\Re)$

Si P appartient à un solide S, on note la vitesse de P : $\overrightarrow{V}(P \in S/\Re)$.

Le vecteur vitesse est tangent en tout instant t à la trajectoire au point $P(t)$.

1.2 Accélération d'un point

Le vecteur accélération d'un point $P(t)$ dans son mouvement par rapport à $\Re$, à la date t, est la dérivée du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(P/\Re)$ par rapport à $\Re$

$$\overrightarrow{\Gamma}(P/\Re) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{V}(P/\Re)\bigg|_{\Re}$$

L'unité de la norme est : $m \cdot s^{-2}$.

Si P est un point géométrique, on note l'accélération de P : $\overrightarrow{\Gamma}(P/\Re)$

Si P appartient à un solide S, on note l'accélération de P : $\overrightarrow{\Gamma}(P \in S/\Re)$.

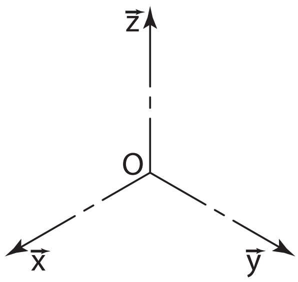
On utilise aussi la lettre $\overrightarrow{a}$ au lieu de $\overrightarrow{\Gamma}$.

2 Dérivation d'un vecteur

2.1 Définition

Soit un espace vectoriel, défini par $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ fixe, appelé repère d'observation ou de dérivation, et soit $\overrightarrow{u}(t)$ un vecteur défini à chaque instant t par : $\overrightarrow{u}(t) = u_1(t)\overrightarrow{x} + u_2(t)\overrightarrow{y} + u_3(t)\overrightarrow{z}$.

On appelle la dérivée du vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ par rapport au temps, dans le repère $\Re$, le vecteur :



$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}(t)\right]_{\Re} = \lim_{dt \to 0}\left[\frac{\overrightarrow{u}(t+dt) - \overrightarrow{u}(t)}{dt}\right]_{\Re}$$

On note

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}(t)\right]_{\Re}, \text{ ou } \frac{d\overrightarrow{u}(t)}{dt}\bigg|_{\Re}$$

On dit : dérivée de $\overrightarrow{u}$ par rapport à t, dans le repère $\Re$.

2.2 Propriétés

Dérivée d'un vecteur constant ($\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ ou $\overrightarrow{z}$) dans $\Re$:

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{x}\right]_{\Re} = \overrightarrow{0}$$

Dérivée d'une somme de vecteurs :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{u_1}(t) + \overrightarrow{u_2}(t)\right)\right]_{\Re} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_1}(t)\right]_{\Re} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_2}(t)\right]_{\Re}$$

Dérivée d'un produit d'un vecteur par un scalaire :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\lambda(t) \cdot \overrightarrow{u}(t)\right)\right]_{\Re} = \frac{d\lambda}{dt}\overrightarrow{u}(t) + \lambda(t)\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}(t)\right]_{\Re}, \text{ où on note : } \frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda}$$

Dérivée d'un produit scalaire :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}\right)\right]_{\Re} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_1}\right]_{\Re} \cdot \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_1} \cdot \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_2}\right]_{\Re}$$

Dérivée d'un produit vectoriel :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\right)\right]_{\Re} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_1}\right]_{\Re} \wedge \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_1} \wedge \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_2}\right]_{\Re}$$

Dérivation composée :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\left(\theta\left(t\right)\right)\right]_{\Re} = \dot{\theta}\left(t\right) \cdot \left[\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{u}\left(\theta\right)\right]_{\Re}$$

Composantes du vecteur dérivé

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\right]_{\Re} &= \left[\frac{d}{dt}\left(u_1(t)\overrightarrow{x} + u_2(t)\overrightarrow{y} + u_3(t)\overrightarrow{z}\right)\right]_{\Re} \\
&= \dot{u}_1\overrightarrow{x} + u_1\left[\frac{d\overrightarrow{x}}{dt}\right]_{\Re} + \dot{u}_2\overrightarrow{y} + u_2\left[\frac{d\overrightarrow{y}}{dt}\right]_{\Re} + \dot{u}_3\overrightarrow{z} + u_3\left[\frac{d\overrightarrow{z}}{dt}\right]_{\Re} \\
\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\right]_{\Re} &= \dot{u}_1\overrightarrow{x} + \dot{u}_2\overrightarrow{y} + \dot{u}_3\overrightarrow{z}
\end{aligned}$$

3 Dérivée dans une base mobile

3.1 Mise en évidence

Soit $\Re_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un repère de référence (fixe) et $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ un repère mobile. Soit $\overrightarrow{u}(t)$ un vecteur de composante $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ dans $\Re$.

$$\overrightarrow{u}(t) = u_1(t)\overrightarrow{x} + u_2(t)\overrightarrow{y} + u_3(t)\overrightarrow{z}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Alors : } \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re} &= \dot{u}_1\overrightarrow{x} + \dot{u}_2\overrightarrow{y} + \dot{u}_3\overrightarrow{z} \\
&\quad + u_1\left.\frac{d\overrightarrow{x}}{dt}\right|_{\Re} + u_2\left.\frac{d\overrightarrow{y}}{dt}\right|_{\Re} + u_3\left.\frac{d\overrightarrow{z}}{dt}\right|_{\Re} \\
&\quad \text{avec : } \left.\frac{d\overrightarrow{x}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\overrightarrow{y}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\overrightarrow{z}}{dt}\right|_{\Re} = \overrightarrow{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Et : } \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_0} &= \dot{u}_1\overrightarrow{x} + \dot{u}_2\overrightarrow{y} + \dot{u}_3\overrightarrow{z} \\
&\quad + u_1\left.\frac{d\overrightarrow{x}}{dt}\right|_{\Re_0} + u_2\left.\frac{d\overrightarrow{y}}{dt}\right|_{\Re_0} + u_3\left.\frac{d\overrightarrow{z}}{dt}\right|_{\Re_0} \\
&= \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re} + u_1\left.\frac{d\overrightarrow{x}}{dt}\right|_{\Re_0} + u_2\left.\frac{d\overrightarrow{y}}{dt}\right|_{\Re_0} + u_3\left.\frac{d\overrightarrow{z}}{dt}\right|_{\Re_0}
\end{aligned}
$$

3.2 Cas particulier : rotation simple

On considère le cas où la base $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ tourne autour de $\overrightarrow{z_0}$, déplacement paramétré par un angle θ :

3.3 Composition des vecteurs vitesses de rotation

Soit $\Re_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un repère fixe.

Soient $\Re_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ et $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ deux repères mobiles par rapport à $\Re_0$, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non constant.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_1} &= \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re} + \overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_1) \wedge \overrightarrow{u} \\
\text{et } \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_0} &= \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_1} + \overrightarrow{\Omega}(\Re_1/\Re_0) \wedge \overrightarrow{u} \\
\text{donc } \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_0} &= \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re} + \left(\overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_1) + \overrightarrow{\Omega}(\Re_1/\Re_0)\right) \wedge \overrightarrow{u} \\
\text{or } \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_0} &= \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re} + \overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_0) \wedge \overrightarrow{u} \\
\overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_0) &= \overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_1) + \overrightarrow{\Omega}(\Re_1/\Re_0)
\end{aligned}$$

3.4 Cas général

Le repère $\Re$ est en rotation quelconque par rapport au repère $\Re_0$. L'orientation de $\Re$ par rapport à $\Re_0$ est définie par trois rotations successives d'angle α_i, autour de $\overrightarrow{e_i}(i = 1, 2, 3)$. (angles d'Euler)

On définit le vecteur vitesse de rotation du repère $\Re$ par rapport au repère $\Re_0$ par :

$$\overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_0) = \sum_{i=1}^{3} \dot{\alpha}_i \overrightarrow{e_i}$$

Alors :

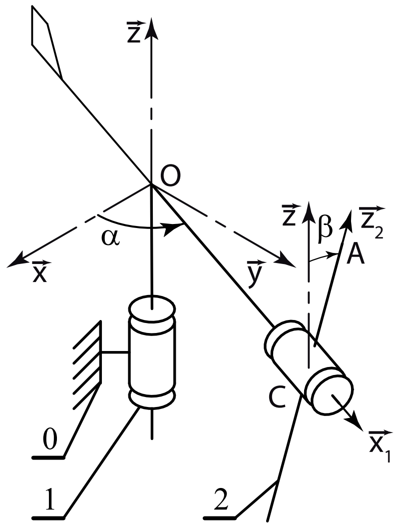
$$\left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re} + \overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_0) \wedge \overrightarrow{u}$$

Dans le cas des angles d'Euler :

$$\overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_0) = \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{u} + \dot{\varphi}\overrightarrow{z_2}$$

4 Application : Eolienne

Soit $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ un repère lié au support 0 d'une éolienne. La girouette 1 a une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z})$ avec le support 0.
Soit $\Re_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z})$ un repère liée à la girouette 1. On pose $\alpha = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y_1})$ autour de $\overrightarrow{z}$.
L'hélice 2 a une pivot d'axe $(C, \overrightarrow{x_1})$ avec la girouette 1, tel que $\overrightarrow{OC} = a.\overrightarrow{x_1}$ (a est une constante positive).
Soit $\Re_2(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ un repère lié à l'hélice 2, tel que l'axe $(C, \overrightarrow{z_2})$ soit confondu avec l'axe (AB) de la pale de l'hélice. On pose $\overrightarrow{CA} = b.\overrightarrow{z_2}$ (b est une constante positive) et $\beta = (\overrightarrow{z}, \overrightarrow{z_2})$.

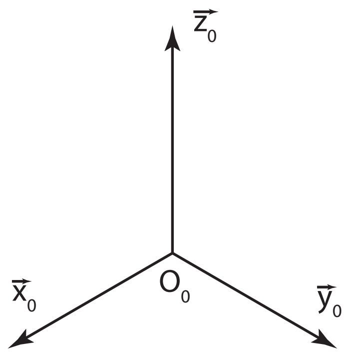


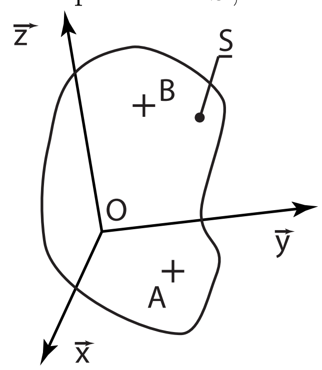
1. Exprimer les vecteurs vitesses de rotations $\overrightarrow{\Omega}(1/0)$, $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$, $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$.
2. Calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(A/\Re)$
3. Calculer le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}(A/\Re)$

5 Champ des vitesses des points d'un solide

5.1 Mise en évidence

Soit S un solide en mouvement par rapport à un repère $\Re_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. Soit $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ un repère lié à S. Soient A et B deux points de S, défini par $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ constant dans $\Re$.





Soient $\overrightarrow{V}(A \in S/\Re_0)$ et $\overrightarrow{V}(B \in S/\Re_0)$ les vitesses des points A et B appartenant à S par rapport au repère $\Re_0$.

5.2 Mouvement entre solides

Décrire le mouvement d'un solide **S** par rapport à un repère $\Re_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ revient à décrire les vitesses d'une infinité de points.

Pour connaitre la vitesse de tout point B d'un solide **S** par rapport à un repère $\Re$, il suffit de connaitre le vecteur vitesse de rotation $\left(\overrightarrow{\Omega}(S/\Re_0) = \omega_x \overrightarrow{x} + \omega_y \overrightarrow{y} + \omega_z \overrightarrow{z}\right)$, et un vecteur vitesse d'un point A de **S** : $\overrightarrow{V}(A \in S/\Re_0) = V_x \overrightarrow{x} + V_y \overrightarrow{y} + V_z \overrightarrow{z}$.

$$\overrightarrow{V}(B \in S/\Re_0) = \overrightarrow{V}(A \in S/\Re_0) + \overrightarrow{\Omega}(S/\Re_0) \wedge \overrightarrow{AB}$$

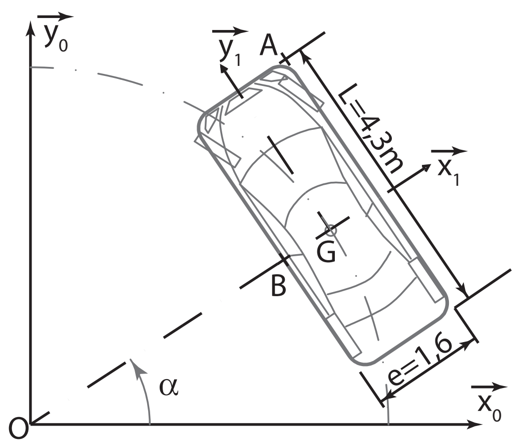
Pour simplifier les notations, le mouvement d'un solide par rapport à un autre est défini par un torseur, entité mathématique qui réunit le vecteur vitesse de rotation et un vecteur vitesse et un point d'expression A.

$$\left\{\mathcal{V}_{S/\Re_0}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S/\Re_0) \\ \overrightarrow{V}(A \in S/\Re_0) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{array} \right\}_A$$

5.3 Axe de viration

Soit Δ l'axe central du champ des vitesses des points de **S** par rapport à $\Re_0$. Les points de Δ ont une vitesse colinéaire à la vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega}(S/\Re_0)$. Cet axe est appelé axe de viration ou axe instantanné de rotation et de glissement, ou axe de gyration.

5.4 Application : vitesses d'une voiture



Soit $\Re_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z})$ un repère lié au sol **0** sur lequel circule une voiture **1**, repérée par $\Re_1(G, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z})$.
Le centre de gravité G de la voiture suit une trajectoire circulaire de centre O, de rayon R. On considère que la direction longitudinale de la voiture reste tangente à cette trajectoire.
Soit $\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$, $x_G = \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{x_0}$ et $y_G = \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{y_0}$.

1. Combien de variables indépendantes sont nécessaires pour décrire le mouvement ?
2. Déterminer $\overrightarrow{\Omega}(1/0)$, le vecteur vitesse de rotation, et $\overrightarrow{V}(G \in 1/0)$, la vitesse du point G.
3. Exprimer $\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}$.
4. Déterminer $\overrightarrow{V}(A \in 1/0)$.
5. Soit Δ_{10}, l'axe de viration entre 1 et 0. Déterminer la direction de Δ_{10} et I_{10} l'intersection de Δ_{10} avec le plan $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$.
6. Déterminer le point du véhicule qui a une vitesse minimale.

7. Application numérique : avec $V_G = 15m/s$ et $R = 25m$, déterminer la vitesse en A et en B
8. Justifier une tolérance de 5% sur les mesures de vitesses par radar.

5.5 Mouvements particuliers

5.5.1 Mouvement à vitesse de rotation nulle

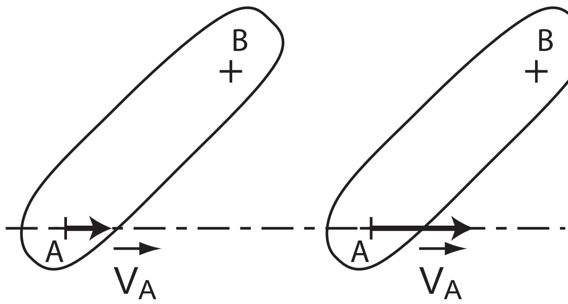
Soit S un solide dont le mouvement est défini $\forall t$ par rapport à $\Re$ par $\overrightarrow{\Omega}(S/\Re) = \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{V}(A \in S/\Re) \neq \overrightarrow{0}$

Alors $\forall B \in S$:

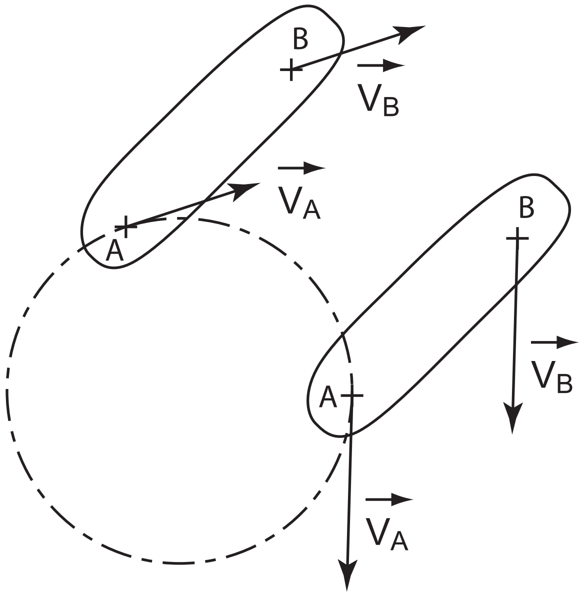
$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(B \in S/\Re) &= \overrightarrow{V}(A \in S/\Re) + \overrightarrow{0} \wedge \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{V}(B \in S/\Re) &= \overrightarrow{V}(A \in S/\Re)\end{aligned}$$

Tous les points du solide S, à un instant t donné, ont le même vecteur vitesse. Ce mouvement est appelé une translation.

Translation rectiligne :
La trajectoire de A est une droite.



Translation circulaire :
La trajectoire de A est un cercle.

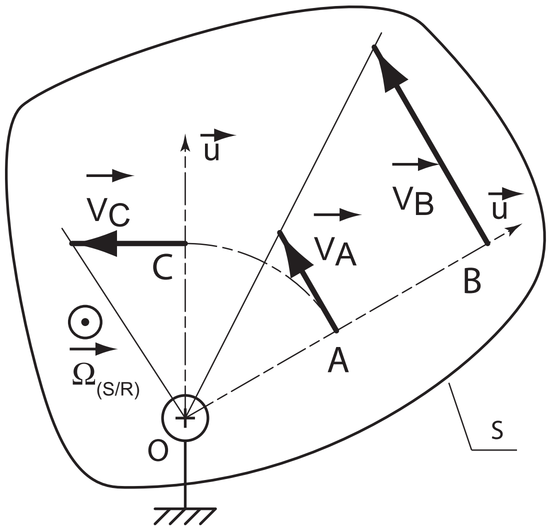


5.5.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Soit S un solide dont le mouvement $\forall t$ est défini dans $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ par $\overrightarrow{\Omega}(S/\Re) = \omega\overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}$, et dont un point O est fixe ($\overrightarrow{V}(O \in S/\Re) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\Gamma}(O \in S/\Re) = \overrightarrow{0}$)

O est un point de l'axe de rotation Δ, et tout point de Δ a une vitesse nulle.

Le mouvement de S par rapport à $\Re$, à l'instant t, est une rotation d'axe instantanné de rotation Δ.



Soient :
- A un point de S tel que $(OA) \perp \Delta$,
- $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire de direction et sens $\overrightarrow{OA}$,
- $\overrightarrow{v}$ unitaire tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{\Omega}(S/\Re))$ directe,
- r la distance OA.

Soit B tel que $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA}$, alors $\overrightarrow{V}(B \in S/\Re) = \lambda.\omega.r.\overrightarrow{v}$. Cette construction s'appelle le triangle des vitesses.

6 Compositions des vitesses

Soit $\Re_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un repère de référence.
Soit $\Re_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ un repère mobile par rapport à $\Re_0$.
Soit S un solide en mouvement par rapport à $\Re_0$ et $\Re_1$, et P un point de S.
On a vu que :

$$\overrightarrow{\Omega}(S/\Re_0) = \overrightarrow{\Omega}(S/\Re_1) + \overrightarrow{\Omega}(\Re_1/\Re_0)$$

Il y a composition des vecteurs vitesses de rotation.
D'autre part :

7 Accélération des points d'un solide

7.1 Champ des accélérations

Soit S un solide dont le mouvement est défini par rapport à $\Re$ par $\overrightarrow{\Omega}(S/\Re)$ et $\overrightarrow{V}(A \in S/\Re)$.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}(A \in S/\Re) &= \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V}(A \in S/\Re)\right]_{\Re} \\
\overrightarrow{\Gamma}(B \in S/\Re) &= \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V}(B \in S/\Re)\right]_{\Re} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V}(A \in S/\Re) + \overrightarrow{\Omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{AB}\right]_{\Re} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V}(A \in S/\Re)\right]_{\Re} + \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\Omega}(S/\Re)\right]_{\Re} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega}(S/\Re) \wedge \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\Re} \\
\overrightarrow{\Gamma}(B \in S/\Re) &= \overrightarrow{\Gamma}(A \in S/\Re) + \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\Omega}(S/\Re)\right]_{\Re} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega}(S/\Re) \wedge \left[\overrightarrow{\Omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{AB}\right]
\end{aligned}
$$

Le champ des accélérations des point d'un solide n'est pas un champ des moments. Il n'existe pas de torseur associé à l'accélération d'un solide

7.2 Composition des accélérations

Soient $\Re_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un repère fixe, et $\Re_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ un repère mobile.
Soit P appartenant à S, un solide mobile par rapport à $\Re_0$ et $\Re_1$. Alors :

$$\overrightarrow{\Gamma}(P \in S/\Re_0) = \overrightarrow{\Gamma}(P \in S/\Re_1) + \overrightarrow{\Gamma}(P \in \Re_1/\Re_0) + 2\overrightarrow{\Omega}(\Re_1/\Re_0) \wedge \overrightarrow{V}(P \in S/\Re_1)$$