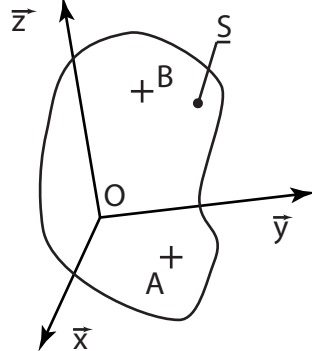
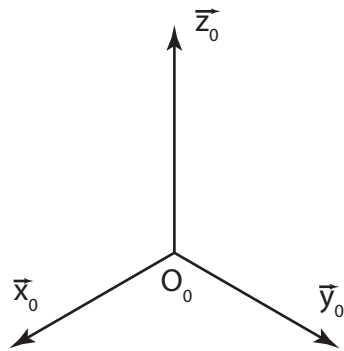


CINEMATIQUE DU SOLIDE

1 Champ des vitesses des points d'un solide

Soit S un solide en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Soit $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à S . Soient A et B deux points de S , défini par \vec{OA} et \vec{OB} constant dans \mathcal{R} .

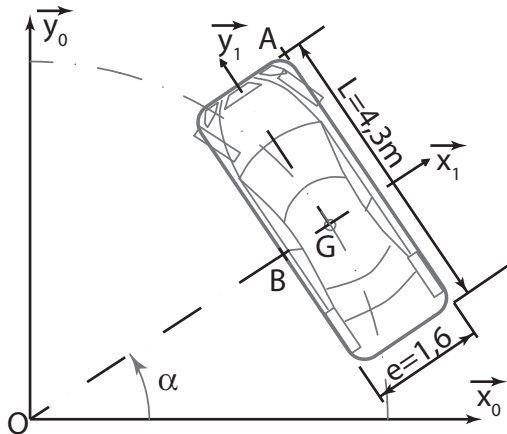


Soient $\vec{V}(A \in S/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{V}(B \in S/\mathcal{R}_0)$ les vitesses des points A et B appartenant à S par rapport au repère \mathcal{R}_0 .

1.1 Axe de viration

Soit Δ l'axe central du champ des vitesses des points de S par rapport à \mathcal{R}_0 . Les points de Δ ont une vitesse colinéaire à la vitesse de rotation $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$. Cet axe est appelé axe de viration ou axe instantané de rotation et de glissement, ou axe de gyration.

1.2 Application : vitesses d'une voiture



Soit $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ un repère lié au sol $\mathbf{0}$ sur lequel circule une voiture $\mathbf{1}$, repérée par $\mathcal{R}_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$.

Le centre de gravité G de la voiture suit une trajectoire circulaire de centre O , de rayon R . On considère que la direction longitudinale de la voiture reste tangente à cette trajectoire.

Soit $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$, $x_G = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{x}_0$ et $y_G = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{y}_0$.

1. Combien de variables indépendantes sont nécessaires pour décrire le mouvement ?
2. Déterminer $\vec{\Omega}(1/0)$, le vecteur vitesse de rotation, et $\vec{V}(G \in 1/0)$, la vitesse du point G .
3. Déterminer $\vec{V}(A \in 1/0)$.
4. Soit Δ_{10} , l'axe de viration entre 1 et 0. Déterminer la direction de Δ_{10} et I_{10} l'intersection de Δ_{10} avec le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.
5. Déterminer le point du véhicule qui a une vitesse minimale.
6. Application numérique : avec $V_G = 15m/s$ et $R = 25m$, déterminer la vitesse en A et en B
7. Justifier une tolérance de 5% sur les mesures de vitesses par radar.

1.3 Mouvements particuliers

1.3.1 Mouvement à vitesse de rotation nulle

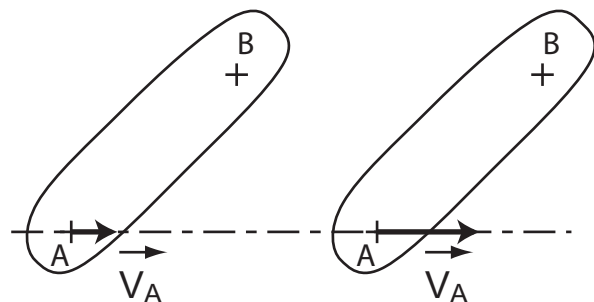
Soit S un solide dont le mouvement est défini $\forall t$ par rapport à \mathcal{R} par $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{0}$ avec $\vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) \neq \vec{0}$
Alors $\forall B \in S$:

$$\begin{aligned}\vec{V}(B \in S/\mathcal{R}) &= \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) + \vec{0} \wedge \overrightarrow{AB} \\ \vec{V}(B \in S/\mathcal{R}) &= \vec{V}(A \in S/\mathcal{R})\end{aligned}$$

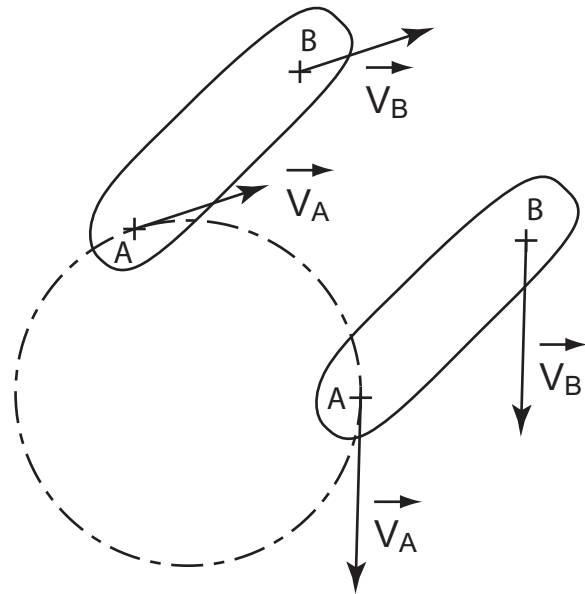
Tous les points du solide S , à un instant t donné, ont le même vecteur vitesse. Ce mouvement est appelé une translation.

Translation rectiligne :

La trajectoire de A est une droite.



Translation circulaire :
La trajectoire de A est un cercle.

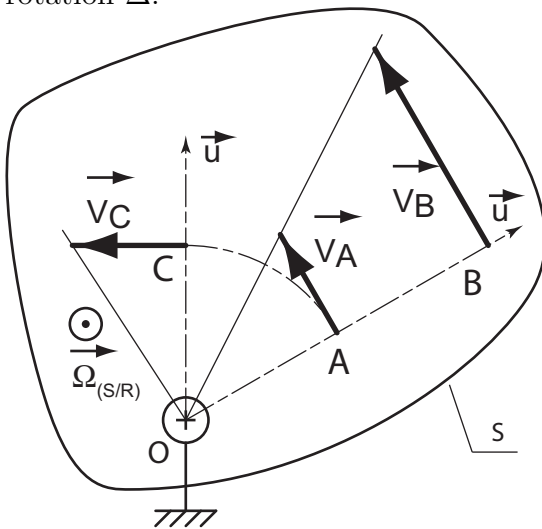


1.3.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Soit S un solide dont le mouvement $\forall t$ est défini dans $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \omega \vec{z} \neq \vec{0}$, et dont un point O est fixe ($\vec{V}(O \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et $\vec{\Gamma}(O \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$)

O est un point de l'axe de rotation Δ , et tout point de Δ a une vitesse nulle.

Le mouvement de S par rapport à \mathcal{R} , à l'instant t , est une rotation d'axe instantané de rotation Δ .



Soient :

- A un point de S tel que $(OA) \perp \Delta$,
- \vec{u} le vecteur unitaire de direction et sens \vec{OA} ,
- \vec{v} unitaire tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}))$ directe,
- r la distance OA .

Soit B tel que $\vec{OB} = \lambda \vec{OA}$, alors $\vec{V}(B \in S/\mathcal{R}) = \lambda \cdot \omega \cdot r \cdot \vec{v}$. Cette construction s'appelle le triangle des vitesses.

2 Champ des accélérations

Soit S un solide dont le mouvement est défini par rapport à \mathfrak{R} par $\vec{\Omega}(S/\mathfrak{R})$ et $\vec{V}(A \in S/\mathfrak{R})$.

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(A \in S/\mathfrak{R}) &= \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(A \in S/\mathfrak{R}) \right]_{\mathfrak{R}} \\ \vec{\Gamma}(B \in S/\mathfrak{R}) &= \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(B \in S/\mathfrak{R}) \right]_{\mathfrak{R}} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(A \in S/\mathfrak{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{AB} \right]_{\mathfrak{R}} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(A \in S/\mathfrak{R}) \right]_{\mathfrak{R}} + \frac{d}{dt} \left[\vec{\Omega}(S/\mathfrak{R}) \right]_{\mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S/\mathfrak{R}) \wedge \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{AB} \right]_{\mathfrak{R}} \\ \vec{\Gamma}(B \in S/\mathfrak{R}) &= \vec{\Gamma}(A \in S/\mathfrak{R}) + \frac{d}{dt} \left[\vec{\Omega}(S/\mathfrak{R}) \right]_{\mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S/\mathfrak{R}) \wedge \left[\vec{\Omega}(S/\mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{AB} \right] \end{aligned}$$

Le champ des accélérations des point d'un solide n'est pas un champ des moments. Il n'existe pas de torseur associé à l'accélération d'un solide

3 Compositions des vitesses

Soit $\mathfrak{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère de référence.

Soit $\mathfrak{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère mobile par rapport à \mathfrak{R}_0 .

Soit S un solide en mouvement par rapport à \mathfrak{R}_0 et \mathfrak{R}_1 , et P un point de S .

On a vu que :

$$\vec{\Omega}(S/\mathfrak{R}_0) = \vec{\Omega}(S/\mathfrak{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0)$$

Il y a composition des vecteurs vitesses de rotation.

D'autre part :

4 Composition des accélérations

Soient $\mathfrak{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe, et $\mathfrak{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère mobile.
Soit P appartenant à S , un solide mobile par rapport à \mathfrak{R}_0 et \mathfrak{R}_1 . Alors :

$$\vec{\Gamma}(P \in S/\mathfrak{R}_0) = \vec{\Gamma}(P \in S/\mathfrak{R}_1) + \vec{\Gamma}(P \in \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) + 2\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) \wedge \vec{V}(P \in S/\mathfrak{R}_1)$$

5 Application : le double pendule

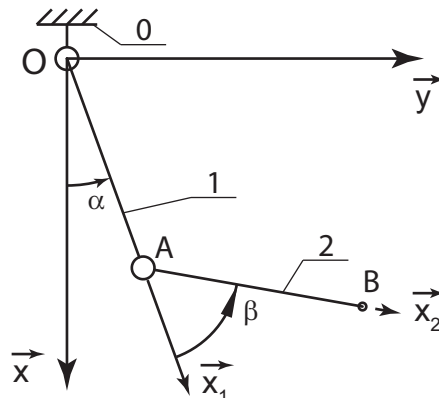
Soit $\mathfrak{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti **0**. Les deux bras **1** et **2** se déplacent dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) .

Le bras **1** a une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) avec le bâti **0**. Soit $\mathfrak{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à **1**. On pose : $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

Le bras **2** a une liaison pivot d'axe (A, \vec{z}) avec le bras **1**, telle que $\vec{OA} = a\vec{x}_1$ ($a > 0$). Soit $\mathfrak{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à **2**. On pose $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. L'extrémité B du bras **2** est telle que $\vec{AB} = a\vec{x}_2$.

Dans la phase de mouvement étudié, les conditions de fonctionnement sont telles que :

$$\beta = -\alpha + \frac{3\pi}{7} \quad \text{avec : } \alpha = \omega t \quad \omega : \text{constante positive}$$



- Déterminer $\vec{V}(B \in 2/1)$, $\vec{V}(B \in 1/0)$. En déduire $\vec{V}(B \in 2/0)$. Représenter graphiquement la composition des vecteurs vitesse de B .
- Déterminer $\vec{\Gamma}(B \in 2/1)$, $\vec{\Gamma}(B \in 1/0)$, $2\vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{V}(B \in 2/1)$. En déduire $\vec{\Gamma}(B \in 2/0)$.