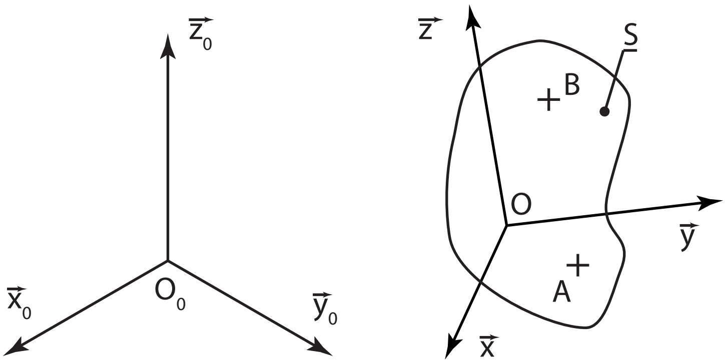
CINEMATIQUE DU SOLIDE

1 Champ des vitesses des points d'un solide

Soit S un solide en mouvement par rapport à un repère $\Re_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. Soit $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ un repère lié à S. Soient A et B deux points de S, défini par $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ constant dans $\Re$.

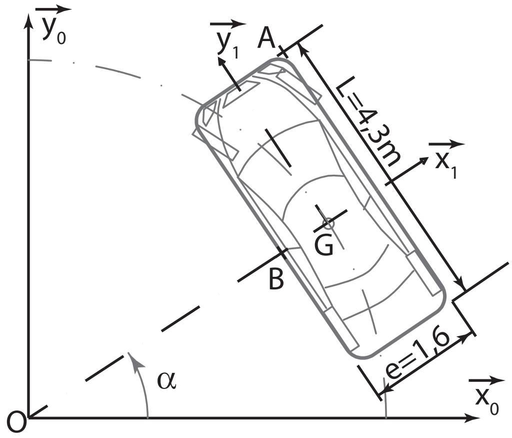


Soient $\overrightarrow{V}(A \in S/\Re_0)$ et $\overrightarrow{V}(B \in S/\Re_0)$ les vitesses des points A et B appartenant à S par rapport au repère $\Re_0$.

1.1 Axe de viration

Soit Δ l'axe central du champ des vitesses des points de **S** par rapport à $\Re_0$. Les points de Δ ont une vitesse colinéaire à la vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega}(S/\Re_0)$. Cet axe est appelé axe de viration ou axe instantanné de rotation et de glissement, ou axe de gyration.

1.2 Application : vitesses d'une voiture



Soit $\Re_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z})$ un repère lié au sol **0** sur lequel circule une voiture **1**, repérée par $\Re_1(G, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z})$.
Le centre de gravité G de la voiture suit une trajectoire circulaire de centre O, de rayon R. On considère que la direction longitudinale de la voiture reste tangente à cette trajectoire.
Soit $\alpha = (\vec{x_0}, \vec{x_1}) = (\vec{y_0}, \vec{y_1})$, $x_G = \overrightarrow{OG}.\vec{x_0}$ et $y_G = \overrightarrow{OG}.\vec{y_0}$.

1. Combien de variables indépendantes sont nécessaires pour décrire le mouvement ?
2. Déterminer $\vec{\Omega}(1/0)$, le vecteur vitesse de rotation, et $\vec{V}(G \in 1/0)$, la vitesse du point G.
3. Déterminer $\vec{V}(A \in 1/0)$.
4. Soit Δ_{10}, l'axe de viration entre 1 et 0. Déterminer la direction de Δ_{10} et I_{10} l'intersection de Δ_{10} avec le plan $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0})$.
5. Déterminer le point du véhicule qui a une vitesse minimale.
6. Application numérique : avec $V_G = 15m/s$ et $R = 25m$, déterminer la vitesse en A et en B
7. Justifier une tolérance de 5% sur les mesures de vitesses par radar.

1.3 Mouvements particuliers

1.3.1 Mouvement à vitesse de rotation nulle

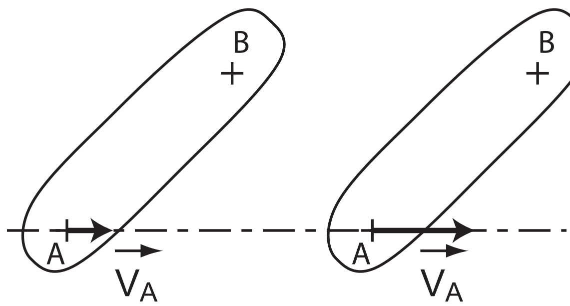
Soit S un solide dont le mouvement est défini $\forall t$ par rapport à $\Re$ par $\vec{\Omega}(S/\Re) = \vec{0}$ avec $\vec{V}(A \in S/\Re) \neq \vec{0}$

Alors $\forall B \in S$:

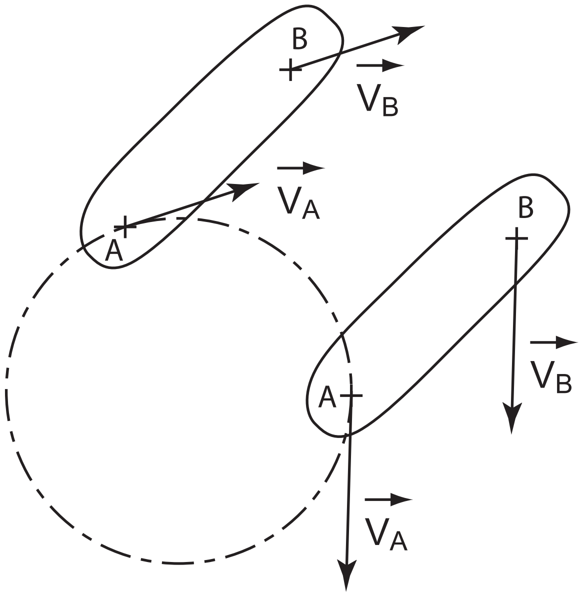
$$\begin{aligned} \vec{V}(B \in S/\Re) &= \vec{V}(A \in S/\Re) + \vec{0} \wedge \overrightarrow{AB} \\ \vec{V}(B \in S/\Re) &= \vec{V}(A \in S/\Re) \end{aligned}$$

Tous les points du solide S, à un instant t donné, ont le même vecteur vitesse. Ce mouvement est appelé une translation.

Translation rectiligne :
La trajectoire de A est une droite.



Translation circulaire :
La trajectoire de A est un cercle.

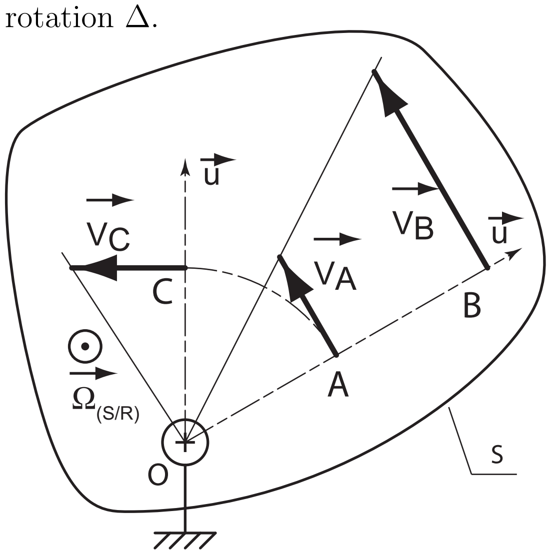


1.3.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Soit S un solide dont le mouvement $\forall t$ est défini dans $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ par $\overrightarrow{\Omega}(S/\Re) = \omega\overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}$, et dont un point O est fixe ($\overrightarrow{V}(O \in S/\Re) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\Gamma}(O \in S/\Re) = \overrightarrow{0}$)

O est un point de l'axe de rotation Δ, et tout point de Δ a une vitesse nulle.

Le mouvement de S par rapport à $\Re$, à l'instant t, est une rotation d'axe instantanné de rotation Δ.



Soient :
- A un point de S tel que $(OA)\perp\Delta$,
- $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire de direction et sens $\overrightarrow{OA}$,
- $\overrightarrow{v}$ unitaire tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{\Omega}(S/\Re))$ directe,
- r la distance OA.

Soit B tel que $\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA}$, alors $\overrightarrow{V}(B \in S/\Re) = \lambda.\omega.r.\overrightarrow{v}$. Cette construction s'appelle le triangle des vitesses.

2 Champ des accélérations

Soit S un solide dont le mouvement est défini par rapport à $\Re$ par $\overrightarrow{\Omega}(S/\Re)$ et $\overrightarrow{V}(A \in S/\Re)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}(A \in S/\Re) &= \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V}(A \in S/\Re)\right]_{\Re} \\
\overrightarrow{\Gamma}(B \in S/\Re) &= \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V}(B \in S/\Re)\right]_{\Re} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V}(A \in S/\Re) + \overrightarrow{\Omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{AB}\right]_{\Re} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V}(A \in S/\Re)\right]_{\Re} + \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\Omega}(S/\Re)\right]_{\Re} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega}(S/\Re) \wedge \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{\Re} \\
\overrightarrow{\Gamma}(B \in S/\Re) &= \overrightarrow{\Gamma}(A \in S/\Re) + \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\Omega}(S/\Re)\right]_{\Re} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega}(S/\Re) \wedge \left[\overrightarrow{\Omega}(S/\Re) \wedge \overrightarrow{AB}\right]
\end{aligned}$$

Le champ des accélérations des point d'un solide n'est pas un champ des moments. Il n'existe pas de torseur associé à l'accélération d'un solide

3 Compositions des vitesses

Soit $\Re_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un repère de référence.
Soit $\Re_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ un repère mobile par rapport à $\Re_0$.
Soit S un solide en mouvement par rapport à $\Re_0$ et $\Re_1$, et P un point de S.
On a vu que :

$$\overrightarrow{\Omega}(S/\Re_0) = \overrightarrow{\Omega}(S/\Re_1) + \overrightarrow{\Omega}(\Re_1/\Re_0)$$

Il y a composition des vecteurs vitesses de rotation.
D'autre part :

4 Composition des accélérations

Soient $\Re_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un repère fixe, et $\Re_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ un repère mobile.
Soit P appartenant à S, un solide mobile par rapport à $\Re_0$ et $\Re_1$. Alors :

$$\overrightarrow{\Gamma}(P \in S/\Re_0) = \overrightarrow{\Gamma}(P \in S/\Re_1) + \overrightarrow{\Gamma}(P \in \Re_1/\Re_0) + 2\overrightarrow{\Omega}(\Re_1/\Re_0) \wedge \overrightarrow{V}(P \in S/\Re_1)$$

5 Application : le double pendule

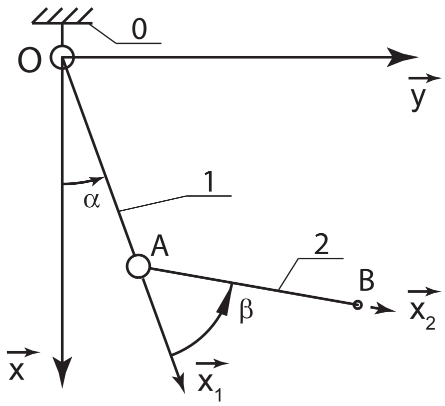
Soit $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ un repère lié au bâti **0**. Les deux bras **1** et **2** se déplace dans le plan $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.

Le bras **1** a une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z})$ avec le bâti **0**. Soit $\Re_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z})$ un repère lié à **1**. On pose : $\alpha = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1})$.

Le bras **2** a une liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{z})$ avec le bras **1**, telle que $\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{x_1} (a > 0)$. Soit $\Re_2(A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z})$ un repère lié à **2**. On pose $\beta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$. L'extrémité B du bras **2** est telle que $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{x_2}$.

Dans la phase de mouvement étudié, les conditions de fonctionnement sont telles que :

$$\beta = -\alpha + \frac{3\pi}{7} \qquad \textit{avec} : \alpha = \omega t \qquad \omega : \text{constante positive}$$



1. Déterminer $\overrightarrow{V}(B \in 2/1)$, $\overrightarrow{V}(B \in 1/0)$. En déduire $\overrightarrow{V}(B \in 2/0)$. Représenter graphiquement la composition des vecteurs vitesse de B.
2. Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}(B \in 2/1)$, $\overrightarrow{\Gamma}(B \in 1/0)$, $2\overrightarrow{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{V}(B \in 2/1)$. En déduire $\overrightarrow{\Gamma}(B \in 2/0)$.