Modèles : connaissance et identification

1 Modèles et Réel : Méthodes utilisées

1.1 Modèle de connaissance

On connait parfaitement le processus à piloter, c'est à dire la nature de la fonction de transfert (son ordre), et ses coefficients.

L'objectif est de prévoir le comportement réel à partir du modèle.

1.2 Modèle de représentation

Le système est inconnu. A partir de l'expérimentation, c'est-à- dire la mesure des ses entrées et sorties, on reconnait l'ordre de la fonction de transfert, puis il faut identifier les coefficients de la fonction de transfert.

L'objectif est d'identifier le modèle représentatif du comportement réel.

1.3 Les hypothèses

1.4 Conclusion

2 Modèle de connaissance

2.1 Théorèmes utiles

Théorème de la dérivation première :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \mathbf{p}\cdot F(\mathbf{p}) - f\left(0^+\right)$$

Théorème de la dérivation seconde :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = \mathbf{p}^2\cdot F(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\cdot f\left(0^+\right) - \dot{f}\left(0^+\right)$$

Théorème de l'intégrale première :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{F(\mathbf{p})}{\mathbf{p}}$$

2.2 Systèmes dynamiques et fonction de transfert

Soit un système dont le comportement dynamique est décrit par l'équation différentielle : où $n \geq m$,

$$a_n\frac{d^n s}{dt^n} + ... + a_0 s(t) = b_m\frac{d^m e}{dt^m} + ... + b_0 e(t)$$

Pour des conditions initiales nulles, on a, dans l'espace de Laplace :

$$
\begin{aligned}
S(p)\left[a_n p^n + ... + a_0\right] &= E(p)\left[b_m p^m + ... + b_0\right] \\
S(p)\sum_{i=0}^{n} a_i p^i &= E(p)\sum_{j=0}^{m} b_j p^j
\end{aligned}
$$

On appelle transmittance ou fonction de transfert :

$$
H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} b_j p^j}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i}
$$

2.3 Propriétés des fonctions de transfert :

Utilité :
Définitions :

- Ordre d'une fonction de transfert : l'ordre du polynome au dénominateur de celle-ci. On distigue :
  - une fonction de transfert canonique : son numérateur est une constante.
  - une fonction de transfert généralisé : son numérateur est un polynome d'ordre ≥ 1.
- Classe d'une fonction de transfert : la plus petite puissance de p dans le dénominateur.
- Pôles d'une fonction de transfert : racines du dénominateur de la fonction de transfert.
- Zéros d'une fonction de transfert : racines du numérateur de la fonction de transfert.

2.4 Méthode de résolution

2.4.1 Présentation

2.4.2 Application à la résolution d'équations différentielles linéaires.

Méthode : Le système physique a un comportement régit par l'équation différentielle linéaire de la forme :

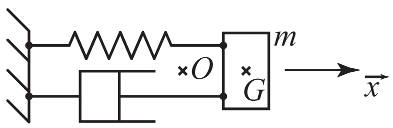
$$
a_n \frac{d^n s}{dt^n} + ... + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + ... + b_0 e(t)
$$

où e(t) et s(t) sont deux fonction du temps t.

1. Transformation des différents termes de l'équation différentielle en leur transformée de Laplace, avec conditions initiales nulles :
   L $\left[a_i \frac{d^i s}{dt^i}\right] = a_i.p^i.S(p)$ et L $\left[b_j \frac{d^j e}{dt^j}\right] = b_j.p^j.E(p)$
2. Ecriture de l'équation différentielle dans le domaine de Laplace : $S(p) = E(p)\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j p^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}$
3. Transformation de $e(t)$ en $E(p)$.
4. Détermination de $S(p)$ sous la forme d'une somme de fonctions apparaissant dans le tableau de transformées.
5. Transformation inverse de chaque terme (tableau de transformées) : $s(t) = \cdots$

2.4.3 Application

Une masse m et de centre de gravité G, glisse horizontalement. Elle est relié au bâti par l'intermédiaire d'un ressort de raideur K et d'un amortisseur de coefficient c, et est soumise à un effort extérieur $Fe(t)$ horizontal. On étudie son mouvement horizontal dans un repère , où O correspond à la position de G lorsque le ressort a sa longueur à vide. On note : $x(t)$ la position de G.



1. Donner la fonction de transfert de $Fe(\mathbf{p})$ vers la position $X(\mathbf{p})$.
2. Donner l'équation de $x(t)$ quand $Fe(t)$ est une impulsion d'amplitude F : $Fe(t) = F.\delta(t)$.

3 Comportements temporels : compléments

3.1 Comportement temporel du système du premier ordre

3.1.1 Rappel

On appelle un système du premier ordre canonique un système modélisé par l'équation différentielle :

$$\tau\frac{ds}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

La fonction de transfert d'ordre 1, de classe 0, est associée :

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}) &= \frac{K}{1+\tau\mathbf{p}} \\ \text{où :}K > 0 &: \text{gain statique (en régime stationnaire)} \\ \text{où :}\tau > 0 &: \text{constante de temps (en s ou en s/rad)} \end{aligned}$$

3.1.2 Réponses temporelles

à un échellon (réponse indicielle) $e(t) = Au(t)$

$$S(\mathbf{p}) = \frac{A}{\mathbf{p}}\frac{K}{1+\tau\mathbf{p}} = \frac{A \cdot K}{\mathbf{p}} - \frac{A \cdot K}{1+\tau\mathbf{p}} \quad \Rightarrow \quad s(t) = AK(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

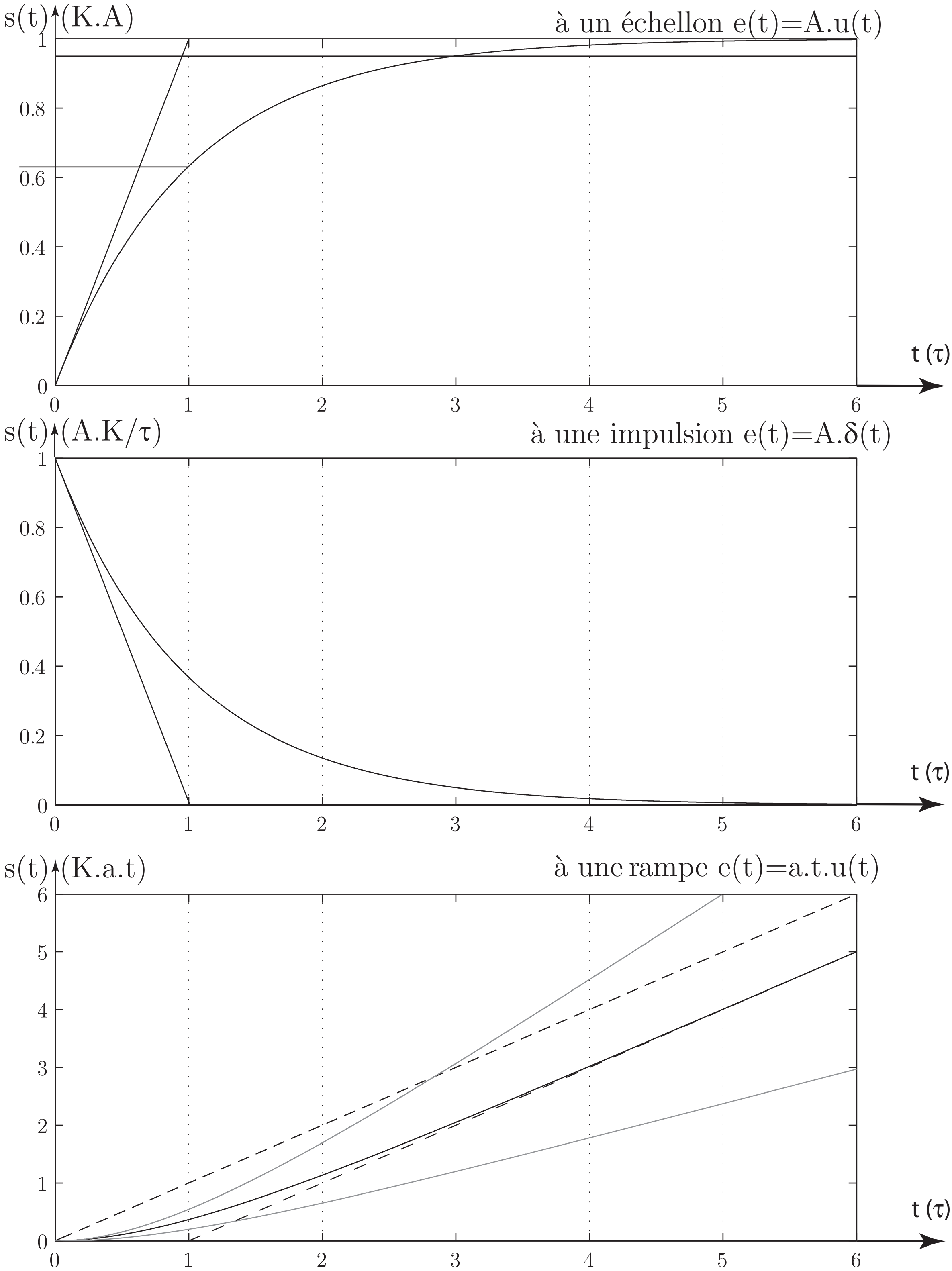
à une impulsion (réponse impulsionnelle) $e(t) = A\delta(t)$

$$S(\mathbf{p}) = \frac{AK}{1+\tau\mathbf{p}} \quad \Rightarrow \quad s(t) = AKe^{-\frac{t}{\tau}}$$

à une rampe $e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$

$$\begin{aligned} S(\mathbf{p}) &= \frac{a}{\mathbf{p}^2}\frac{K}{1+\tau\mathbf{p}} = a \cdot K\left(-\frac{\tau}{\mathbf{p}} + \frac{1}{\mathbf{p}^2} + \frac{\tau^2}{1+\tau\mathbf{p}}\right) \\ s(t) &= a \cdot K(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{aligned}$$

Figure 1: Réponses temporelles d'un 1° ordre



3.2 Comportement temporel du système du second ordre

3.2.1 Présentation

On appelle un système du second ordre canonique un système modélisé par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0}\frac{ds}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

La fonction de transfert d'ordre 2, de classe 0, est associée :

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{p}) \quad &= \quad \frac{K}{1 + 2z\frac{\mathbf{p}}{\omega_0} + \frac{\mathbf{p}^2}{\omega_0^2}} \\
\text{où :}K > 0 \quad &: \quad \text{gain statique (en régime stationnaire)} \\
\text{où :}\omega_0 > 0 \quad &: \quad \text{pulsation propre non amortie (en rad/s)} \\
\text{où :}z > 0 \quad &: \quad \text{coefficient d'amortissement} \\
H(\mathbf{p}) \text{ peut se réécrire :} \quad & \quad H(\mathbf{p}) = \frac{K}{\left(\frac{\mathbf{p}}{\omega_0} + z\right)^2 + (1 - z^2)}
\end{aligned}$$

On distingue trois cas, selon la nature des pôles :
- $z > 1$: Deux pôles réels, le régime est dit sur-amorti, ou apériodique
- $z = 1$: Deux pôles réels doubles, le régime est dit critique
- $z < 1$: Deux pôles complexes conjugués, le régime est dit oscillant, sous-amorti, ou pseudo-périodique.

3.2.2 Performance

Stabilité

La stabilité est intrinsèque à la définition d'un second ordre : $\omega_0 > 0$

Précision :

L'erreur statique est liée à K.

rapidité :

Dans la réponse indicielle, l'instant où $s(t)$ pénètre la fourchette $K \pm 0,05\%$ dépend de l'amplitude des oscillations, donc de l'amortissement z. (voir figure 3) Le temps de réponse dépend donc de l'amortissement et de la pulsation propre. Il est défini par la courbe (figure 4), présentant le temps de réponse réduit ($T_R.\omega_0$) en fonction de z. On note les simplifications suivantes :
- $z > 2$: $T_R.\omega_0 \simeq 6z$
- $z < 2$: $T_R.\omega_0 \simeq \frac{3}{z}$

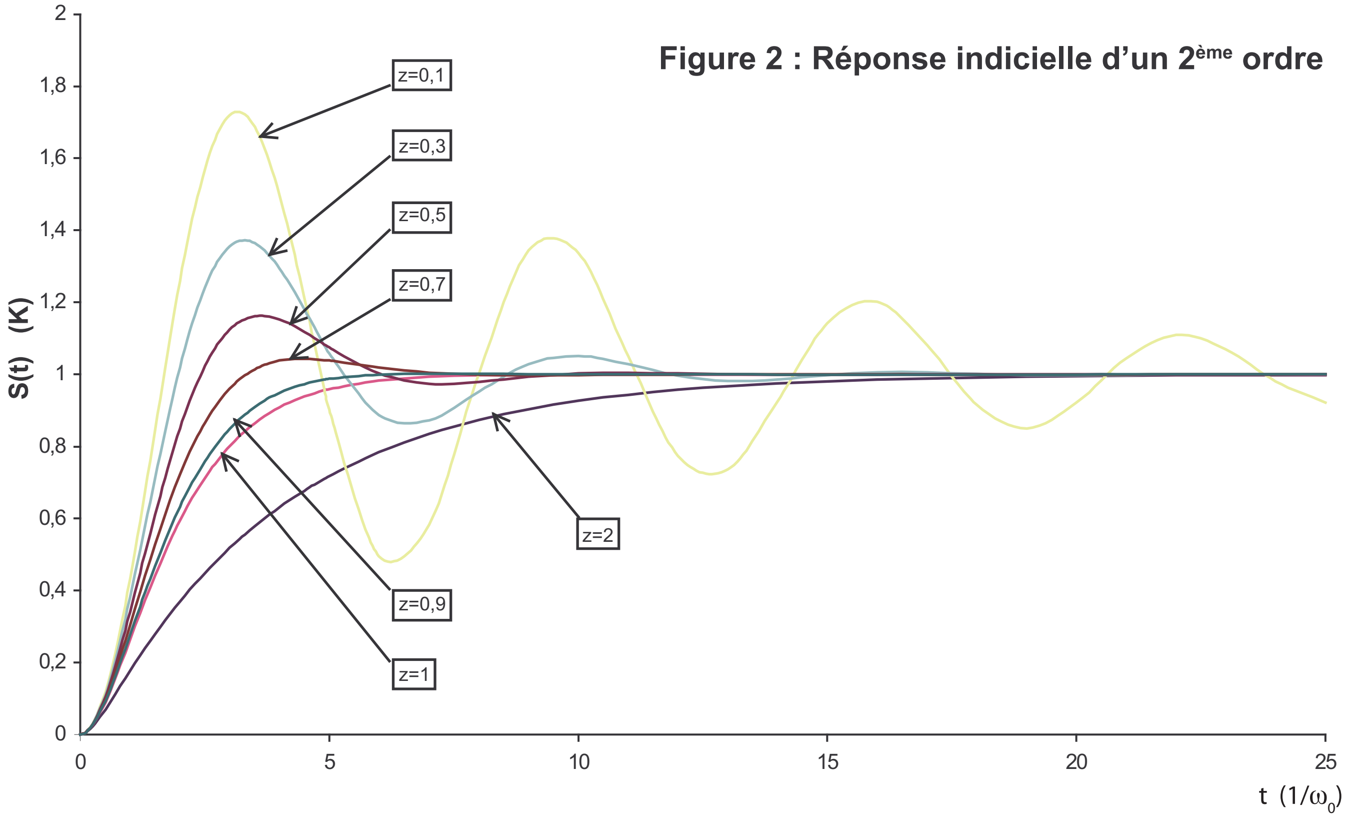


Figure 2 : Réponse indicielle d'un 2ème ordre
S(t) (K)
t (1/ω0)
z=0,1
z=0,3
z=0,5
z=0,7
z=0,9
z=1
z=2

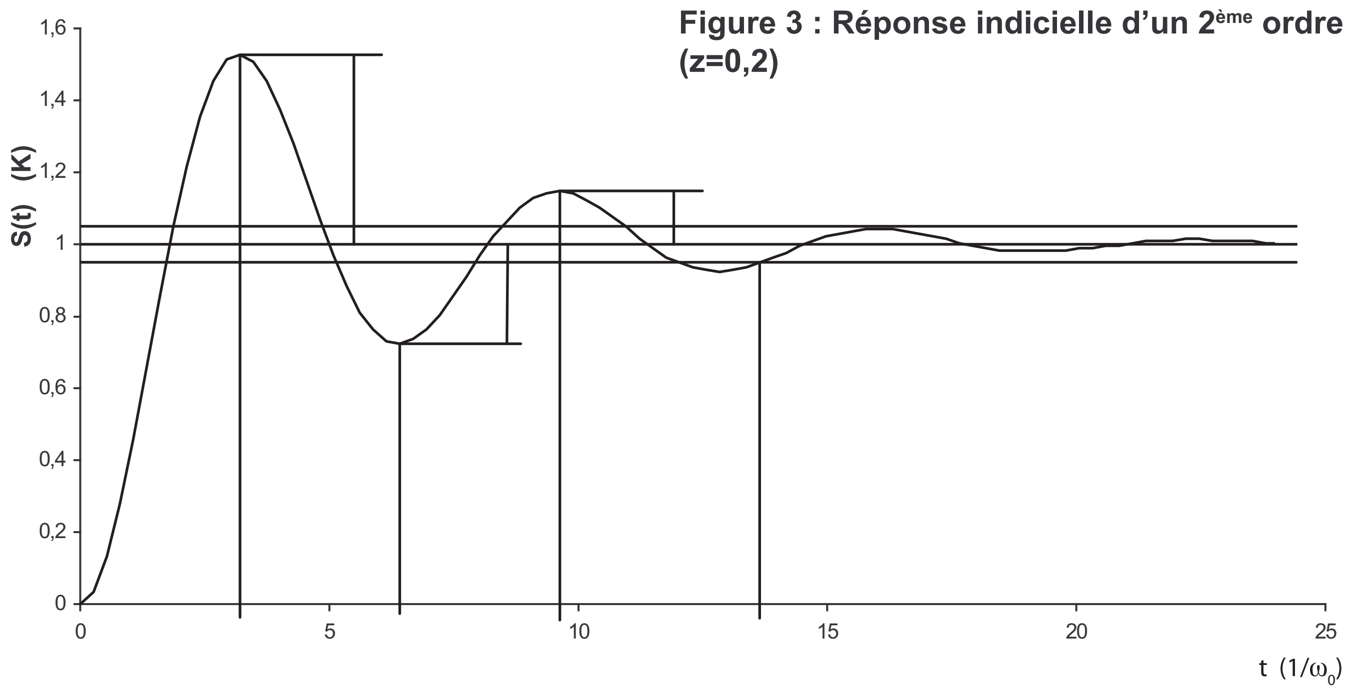


Figure 3 : Réponse indicielle d'un 2ème ordre
(z=0,2)
S(t) (K)
t (1/ω0)

Figure 4 : Temps de réponse réduit d'un système du second ordre.

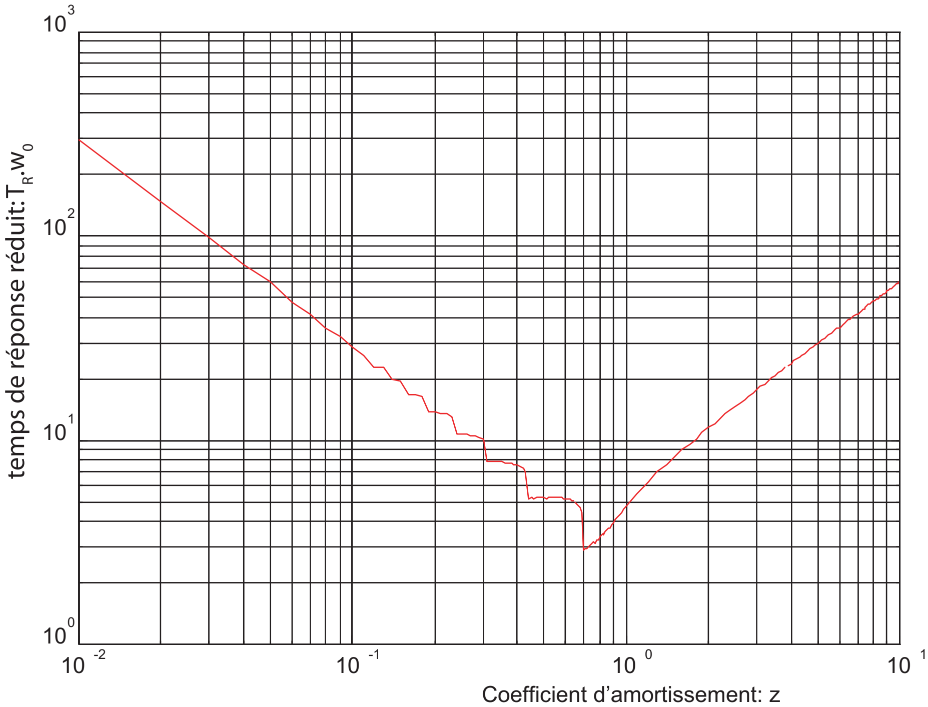


Figure 5 : Dépassements relatifs des transitoires