REPRESENTATION ET MODELISATION DU COMPORTEMENT DES SYSTEMES

1/ Modéliser le comportement

Modéliser consiste à associer à la réalité une représentation abstraite (mathématique) en vue de l'étudier et de la maitriser.
La réalité étant très complexe, il n'est possible de modéliser qu'une représentation simplifiée. Ces simplifications sont appelées des **hypothèses**.
Dans ce premier cours, nous nous limiterons à des modèles basés sur la connaissance de la **structure du système** et sur des **comportements empiriquement** constatés.

2/ Transformation de Laplace :

2.1/ ***Définition et propriétés***

L'objet de la transformation de Laplace est de modéliser des phénomènes et signaux qui évoluent au cours du temps. Or, dans le cadre d'une étude, nous ne nous intéresserons à ces évolutions qu'à partir de l'instant initial de l'étude ($t = 0s$).
Nous considèrerons que :

- toutes les fonctions du temps $f(t)$ sont nulles $t < 0$. Ces fonctions sont dites causales.

$$f = \begin{cases} 0 \; si \; t < 0 \\ f(t) si \; t \geq 0 \end{cases}$$

- La valeur de la fonction à l'instant initial $f(0^+)$ est appelée **condition initiale**. Sauf si elle est explicitement donnée, elle sera considérée comme nulle.

Alors, on appelle la fonction transformée de Laplace, la fonction F de la variable p (complexe) définie par :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t).e^{-p.t} dt$$

Avec $p = \alpha + j.\omega$

2.2/ ***Exemple : transformée de la fonction Echelon***

2.3/ ***Tableau de transformées***

Soit $f(t)$ une fonction causale et $F(p)$ sa transformée dans le domaine de Laplace.

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1		
$K \cdot u(t)$	$\frac{K}{p}$	$e^{-a.t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$K.t \cdot u(t)$	$\frac{K}{p^2}$	$\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot u(t)$	$\frac{1}{p(1+\tau.p)}$
$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{a.t} t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$sin(\omega.t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$e^{-a.t}\, sin(\omega.t)\,.u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$cos(\omega.t) \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$e^{-a.t}\, cos(\omega.t)\,.u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

$f(t)$	$F(p)$
$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t\right) \cdot u(t)$	$\frac{1}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$ Avec $z < 1$
$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t+\varphi\right)\right) \cdot u(t)$ Avec $\sin\varphi = \sqrt{1-z^2}$ et $\cos\varphi = z$	$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$ Avec $z < 1$

2.4/ ***Propriétés :***

a) Unicité :

à x(t) correspond X(p) unique
à X(p) correspond x(t) unique

b) Linéarité :

$\mathcal{L}[\alpha.x(t) + \beta.y(t)] = \alpha.X(p) + \beta.Y(p)$

2.5/ ***Théorèmes***

Théorème du retard

$\mathcal{L}[f\,(t-\tau)] = e^{-\tau.p} F\,(p))$

Théorème de la valeur finale

$\lim_{t\to\infty} f\,(t) = \lim_{p\to 0} p.F(p)$

Théorème de la valeur initiale

$\lim_{t\to 0} f\,(t) = \lim_{p\to\infty} p.F(p)$

2.6/ ***Application 1 : signal en créneau***

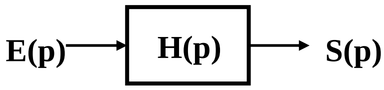
3/ Représentation du comportement par schémas bloc

3.1/ *Comportement, fonction de transfert et schéma bloc*

Dans le cadre de ce cours, le comportement est la loi mathématique qui lie un effet $s(t)$ (la réponse ou la sortie) à une cause $e(t)$ (l'excitation ou l'entrée). Cette loi sera écrite dans le domaine de Laplace sous la forme :

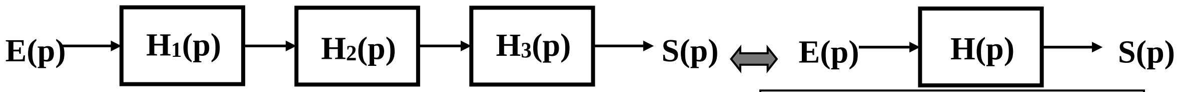
$$\boxed{S(p) = H(p).E(p)}$$

1. $H(p)$ est appelée **fonction de transfert** (du comportement ou de l'organe considéré).
2. $H(p)$ est indépendante des entrées et des sorties.
3. $H(p)$ ne dépend que de la variable p
4. La représentation graphique sous forme de schéma bloc s'écrit **toujours** dans le domaine de Laplace :



5.

3.2/ *Blocs en série*

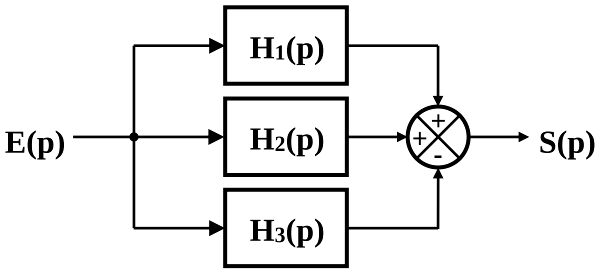


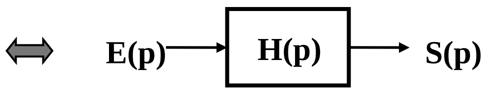
La fonction de transfert de l'ensemble est égale au produit des fonctions de transfert de chaque bloc.

$$\boxed{H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)}$$

Démonstration :

3.3/ *Bloc en parrallèle*





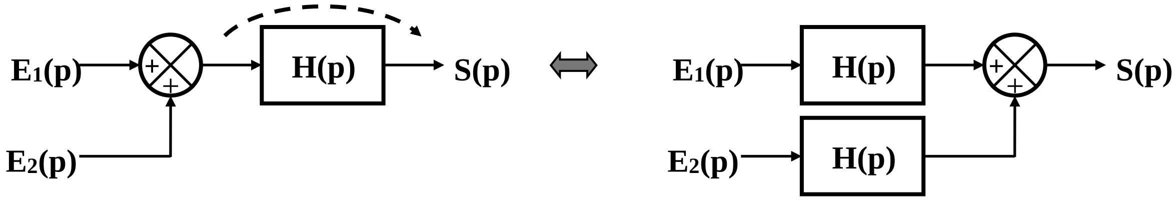
$$\boxed{H(p) = H_1(p) + H_2(p) - H_3(p)}$$

La fonction de transfert de l'ensemble est égale à la somme des fonctions de transfert de chaque bloc.

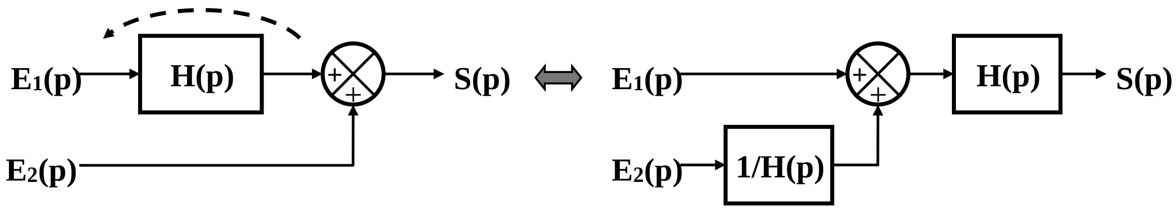
Démonstration :

Remarque : En combinant des blocs en série et en parallèle, on retrouve la propriété de linéarité.

3.4/ *Déplacements des sommateurs*

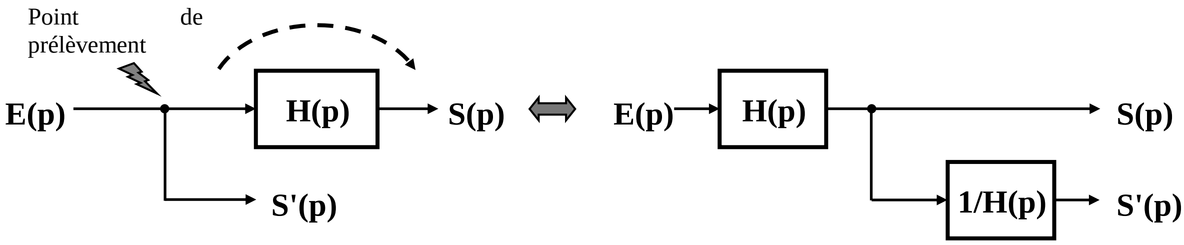


Démonstration :

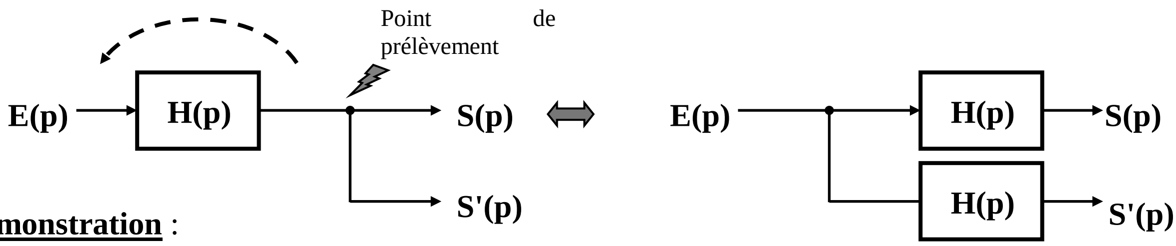


Démonstration :

3.5/ ***Déplacements des points de prélèvement***

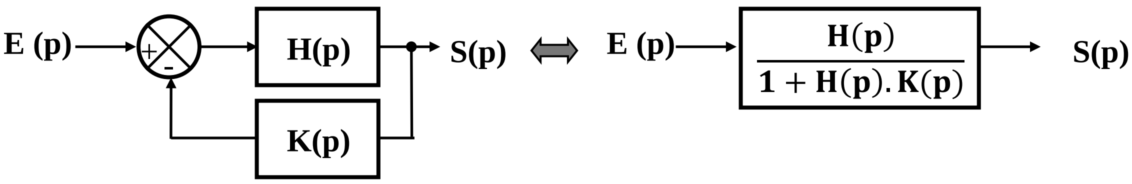


Démonstration :



Démonstration :

3.6/ ***Simplification d'une boucle de réaction***



Démonstration :

4/ Comportements canoniques

4.1/ *Gain statique*

Le comportement le plus simple que l'on puisse rencontrer est le cas où l'effet est proportionnel à la cause.

$Y(p) = K.X(p)$;

$\boxed{H(p) = K}$

4.1/ *Intégrale temporelle*

Dans un schéma bloc, il peut apparaitre un comportement qui ne corresponde pas exactement à un organe, mais à un changement de perspective. Par exemple, le mouvement d'une masse est décrit par une accélération, une vitesse et une position en fonctions du temps.
Le passage de l'un à l'autre se fait par une intégration par rapport au temps.

$\boxed{H(p) = \frac{1}{p}}$

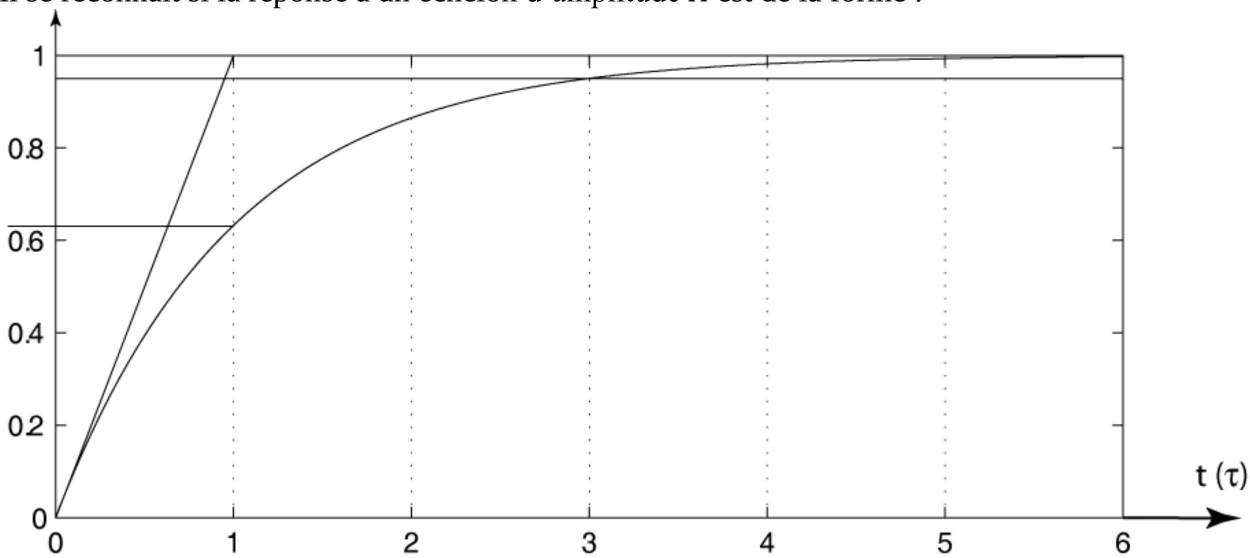
4.2/ *Système du 1° ordre*

La fonction de transfert est de la forme :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}}$$

où : $K > 0$: gain statique (en régime stationnaire)
où : $\tau > 0$: constante de temps (en s ou en s/rad)

Il se reconnait si la réponse à un échelon d'amplitude A est de la forme :



L'expression mathématique de $s(t)$ est :

$$s(t) = A\,K(1 - e^{-t/\tau})$$

a) Application 2 : justification de l'expression de $s(t)$

b) Caractéristiques de la réponse indicielle

-
-
-
-
-

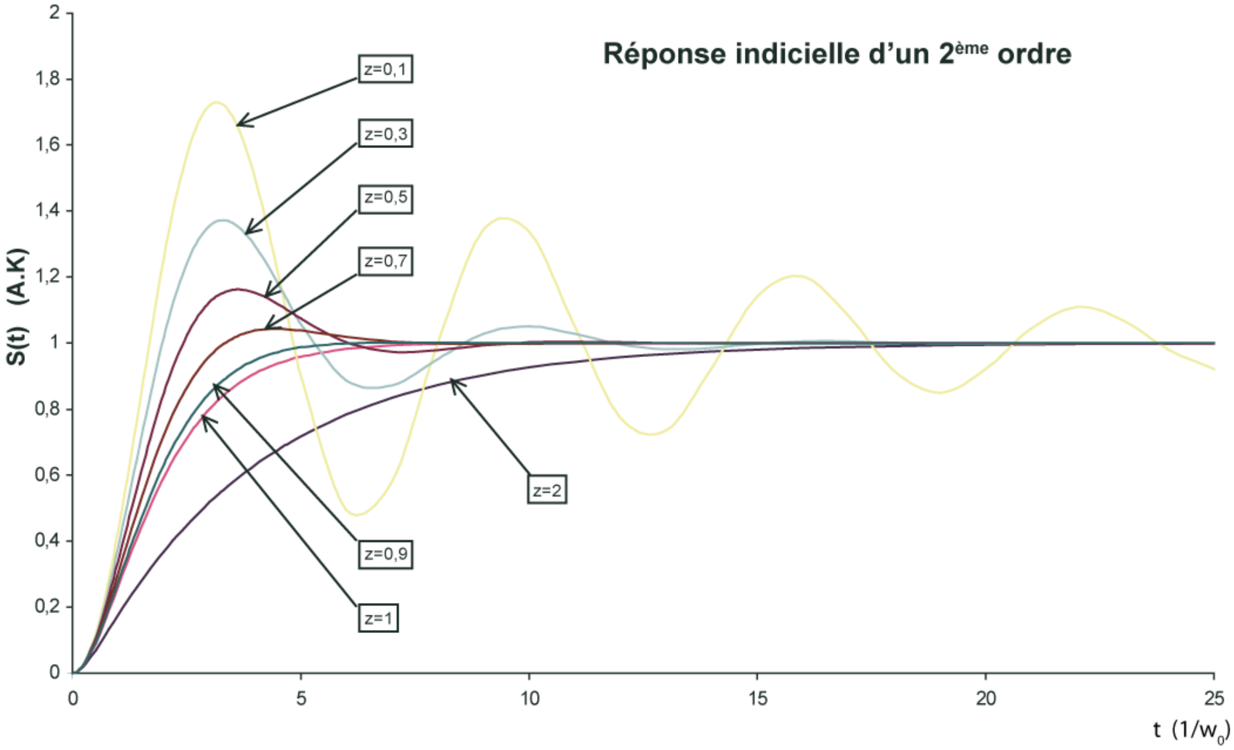
4.3/ ***Système du 2° ordre***

La fonction de transfert est de la forme :

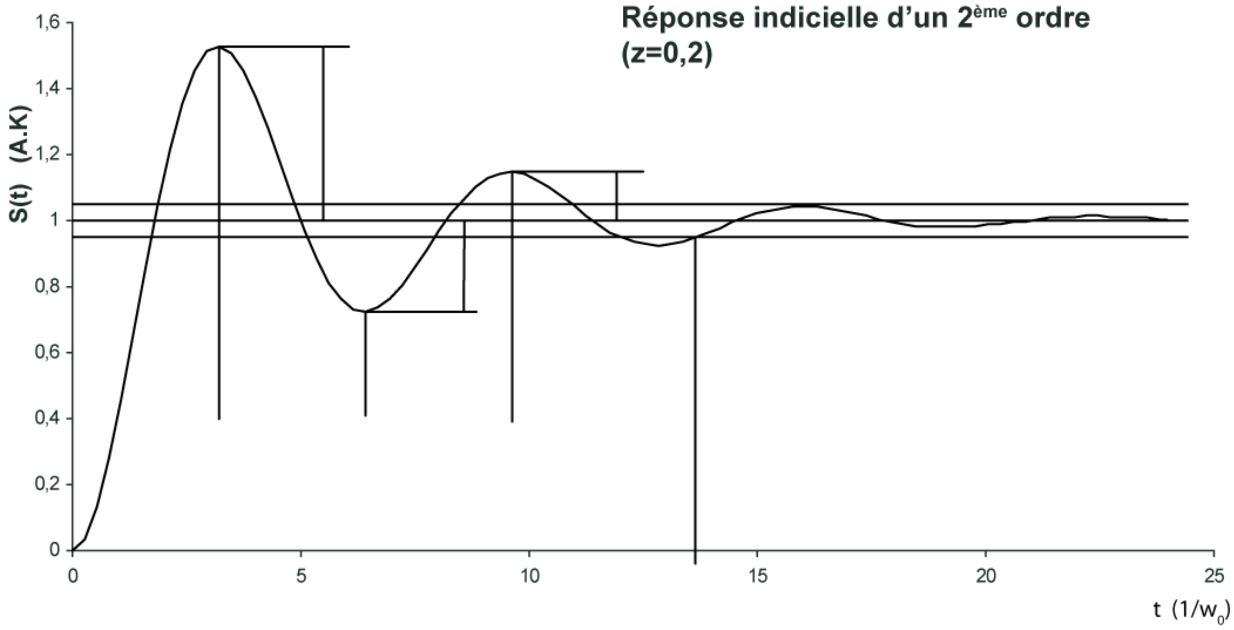
$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

où : $K > 0$: gain statique (en régime stationnaire)
où : $\omega_0 > 0$: pulsation propre non amortie (en rad/s)
où : $z > 0$: coefficient d'amortissement

Il se reconnait si la réponse à un échelon d'amplitude A est de la forme :

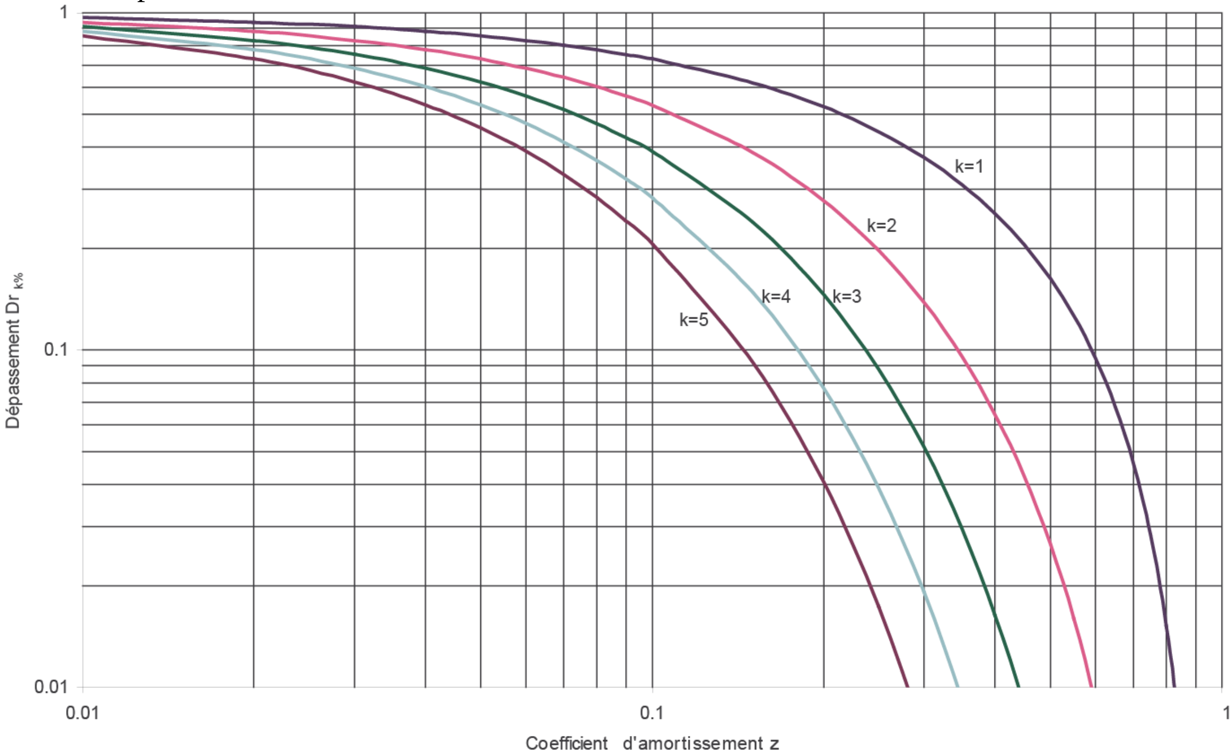


a) Caractéristiques de la réponse indicielle

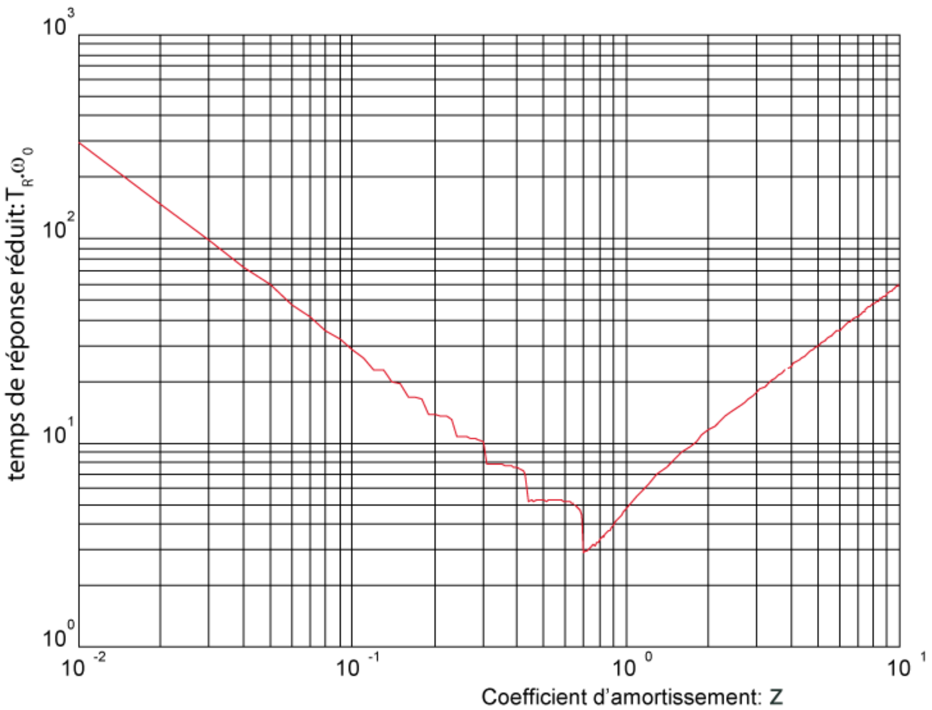


Annexe 1 : réponse indicielle d'un deuxième ordre

1- Dépassements relatifs



2- Temps de réponse

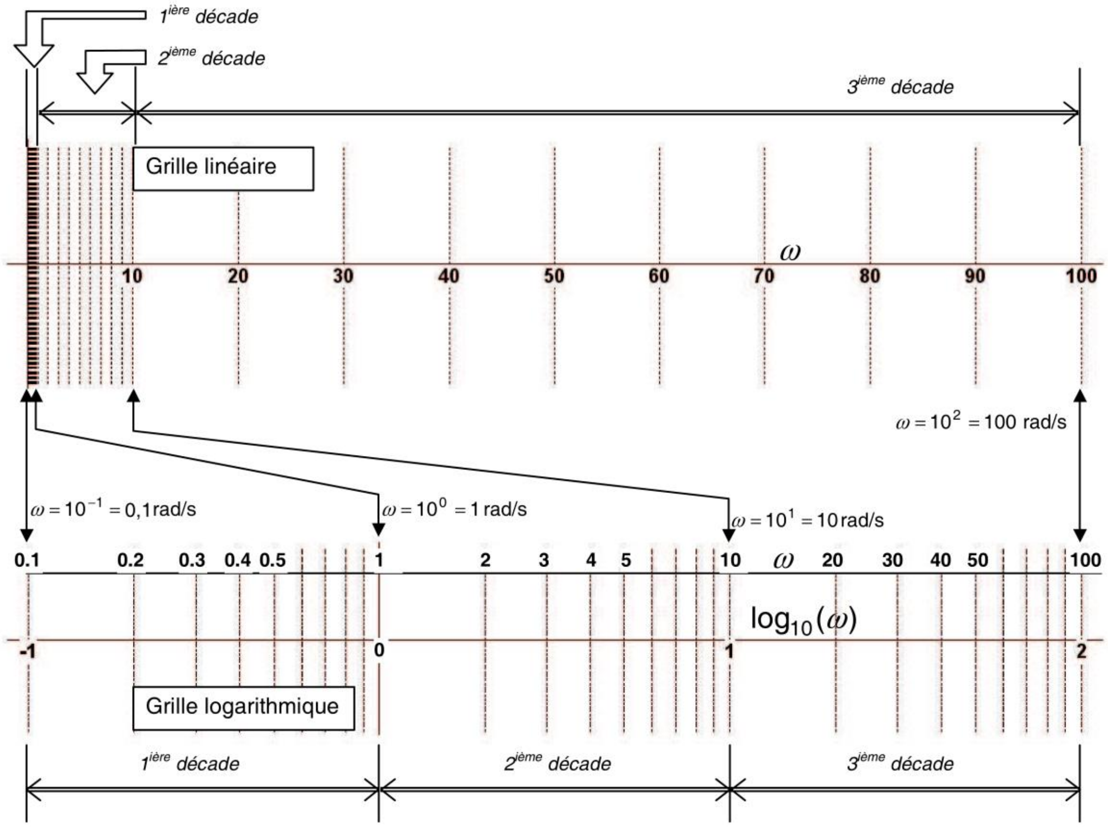


Annexe 2 : échelle logarithmique

Echelle Log :

La figure ci-dessous représente graphiquement la distribution d'une pulsation ω sur 3 décades, de 10^{-1} à 10^{2} [rad/s] avec dix valeurs dans chaque décade sur deux **grilles**, l'une **linéaire** (haut) l'autre **logarithmique** (bas).

Grille Log :



Remarque :

Dans une grille logarithmique, chaque décade a le même « poids » en terme de distribution en abscisse, ce qui n'est pas le cas d'une grille dite linéaire où la dernière décade est "sur-représentée" et occupe environ 90% de la plage.