# CINEMATIQUE DU POINT D'UN SOLIDE

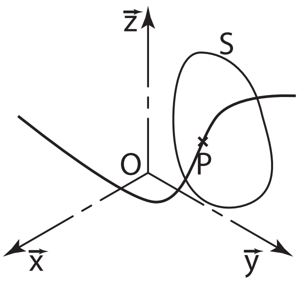
## 1 Notion de point

En mécanique, on considère deux types de points :

1. un point $P$ appartenant à un solide $S$. Il est fixe par rapport à celui-ci. Soit $\Re$ le repère associé à $S$, alors $P$ a des coordonnées fixes dans $\Re$.
2. un point $I$, dit géométrique. Il est défini par ses propriétés géométriques. Il peut être mobile dans tous les repères du mécanisme. Ses coordonnées ne sont pas constantes dans un repère considéré.

### 1.1 Position d'un point

Soit $P(t)$ un point en mouvement par rapport à un repère $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$. Le vecteur position du point $P$, dans le repère $\Re$, à la date $t$ est le vecteur $\overrightarrow{OP} = x(t)\overrightarrow{x} + y(t)\overrightarrow{y} + z(t)\overrightarrow{z}$. L'unité de la norme de $\overrightarrow{OM}$ est le mètre, $m$.
Au cours du mouvement, le point $P$ décrit, par ses positions successives dans $\Re$, une courbe appelée *trajectoire*, notée $T(P/\Re)$.

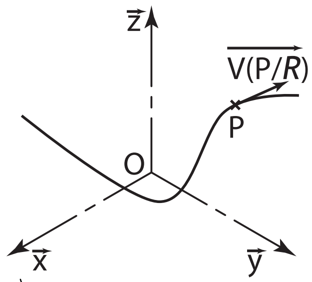



D'une manière générale, il existe deux trajectoires simples : la droite (souvent liée à un mouvement de translation) et l'arc de cercle définit par un centre et un rayon (souvent lié à un mouvement de rotation).

### 1.2 Vitesse d'un point

Le vecteur vitesse du point $P(t)$ dans son mouvement par rapport à $\Re$, à la date $t$, est la dérivée par rapport au temps du vecteur position, pour un observateur lié à $\Re$.

$$\overrightarrow{V}(P/\Re) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\bigg|_{\Re}$$




L'unité de la norme est le mètre par seconde, $m/s$.

Si $P$ est un point géométrique, on note la vitesse de $P$ : $\overrightarrow{V}(P/\Re)$

Si $P$ appartient à un solide $S$, on note la vitesse de $P$ : $\overrightarrow{V}(P \in S/\Re)$.

Le vecteur vitesse est tangent en tout instant t à la trajectoire au point $P(t)$.

### 1.3 Accélération d'un point

Le vecteur accélération d'un point $P(t)$ dans son mouvement par rapport à $\Re$, à la date $t$, est la dérivée du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(P/\Re)$ par rapport à $\Re$

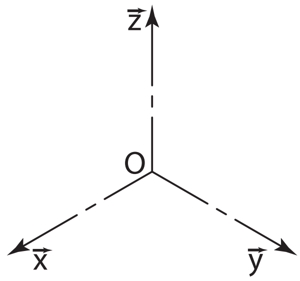
$$\overrightarrow{\Gamma}(P/\Re) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{V}(P/\Re)\bigg|_{\Re}$$

L'unité de la norme est : $m \cdot s^{-2}$.
Si $P$ est un point géométrique, on note l'accélération de $P$ : $\overrightarrow{\Gamma}(P/\Re)$
Si $P$ appartient à un solide $S$, on note l'accélération de $P$ : $\overrightarrow{\Gamma}(P \in S/\Re)$.
On utilise aussi la lettre $\overrightarrow{a}$ au lieu de $\overrightarrow{\Gamma}$.

## 2 Dérivation d'un vecteur

### 2.1 Définition

Soit un espace vectoriel, défini par $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ fixe, appelé repère d'observation ou de dérivation, et soit $\overrightarrow{u}(t)$ un vecteur défini à chaque instant $t$ par : $\overrightarrow{u}(t) = u_1(t)\overrightarrow{x} + u_2(t)\overrightarrow{y} + u_3(t)\overrightarrow{z}$.
On appelle la dérivée du vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ par rapport au temps, dans le repère $\Re$, le vecteur :




$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}(t)\right]_{\Re} = \lim_{dt \to 0}\left[\frac{\overrightarrow{u}(t+dt) - \overrightarrow{u}(t)}{dt}\right]_{\Re}$$

On note

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}(t)\right]_{\Re}, \text{ ou } \frac{d\overrightarrow{u}(t)}{dt}\bigg|_{\Re}$$

On dit : dérivée de $\overrightarrow{u}$ par rapport à $t$, dans le repère $\Re$.

### 2.2 Propriétés

Dérivée d'un vecteur constant ($\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ ou $\overrightarrow{z}$) dans $\Re$ :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{x}\right]_{\Re} = \overrightarrow{0}$$

Dérivée d'une somme de vecteurs :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{u_1}(t) + \overrightarrow{u_2}(t)\right)\right]_{\Re} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_1}(t)\right]_{\Re} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_2}(t)\right]_{\Re}$$

Dérivée d'un produit d'un vecteur par un scalaire :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\lambda(t) \cdot \overrightarrow{u}(t)\right)\right]_{\Re} = \frac{d\lambda}{dt}\overrightarrow{u}(t) + \lambda(t)\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}(t)\right]_{\Re}, \text{ où on note : } \frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda}$$

Dérivée d'un produit scalaire :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}\right)\right]_{\Re}=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_1}\right]_{\Re}\cdot\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_1}\cdot\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_2}\right]_{\Re}$$

Dérivée d'un produit vectoriel :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\right)\right]_{\Re}=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_1}\right]_{\Re}\wedge\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_1}\wedge\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_2}\right]_{\Re}$$

Dérivation composée :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\left(\theta\left(t\right)\right)\right]_{\Re}=\dot{\theta}\left(t\right)\cdot\left[\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{u}\left(\theta\right)\right]_{\Re}$$

Composantes du vecteur dérivé

$$\begin{aligned}\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\right]_{\Re} &= \left[\frac{d}{dt}\left(u_1(t)\overrightarrow{x}+u_2(t)\overrightarrow{y}+u_3(t)\overrightarrow{z}\right)\right]_{\Re}\\ &= \dot{u}_1\overrightarrow{x}+u_1\left[\frac{d\overrightarrow{x}}{dt}\right]_{\Re}+\dot{u}_2\overrightarrow{y}+u_2\left[\frac{d\overrightarrow{y}}{dt}\right]_{\Re}+\dot{u}_3\overrightarrow{z}+u_3\left[\frac{d\overrightarrow{z}}{dt}\right]_{\Re}\\ \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}\right]_{\Re} &= \dot{u}_1\overrightarrow{x}+\dot{u}_2\overrightarrow{y}+\dot{u}_3\overrightarrow{z}\end{aligned}$$

# 3 Dérivée dans une base mobile

## 3.1 Mise en évidence

Soit $\Re_0(O_0,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ un repère de référence (fixe) et $\Re(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$ un repère mobile. Soit $\overrightarrow{u}(t)$ un vecteur de composante $(u_1(t),u_2(t),u_3(t))$ dans $\Re$.

$$\overrightarrow{u}(t)=u_1(t)\overrightarrow{x}+u_2(t)\overrightarrow{y}+u_3(t)\overrightarrow{z}$$

## 3.2 Cas particulier : rotation simple

On considère le cas où la base $B(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ tourne autour de $\overrightarrow{z_0}$, déplacement paramétré par un angle $\theta$ :

Remarque :

## 3.3 Composition des vecteurs vitesses de rotation

Soit $\Re_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un repère fixe.

Soient $\Re_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ et $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ deux repères mobiles par rapport à $\Re_0$, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non constant.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_1} &= \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re} + \overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_1) \wedge \overrightarrow{u} \\
\text{et } \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_0} &= \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_1} + \overrightarrow{\Omega}(\Re_1/\Re_0) \wedge \overrightarrow{u} \\
\text{donc } \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_0} &= \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re} + \left(\overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_1) + \overrightarrow{\Omega}(\Re_1/\Re_0)\right) \wedge \overrightarrow{u} \\
\text{or } \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_0} &= \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re} + \overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_0) \wedge \overrightarrow{u} \\
\overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_0) &= \overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_1) + \overrightarrow{\Omega}(\Re_1/\Re_0)
\end{aligned}$$

### 3.4 Cas général

Le repère $\Re$ est en rotation quelconque par rapport au repère $\Re_0$. L'orientation de $\Re$ par rapport à $\Re_0$ est définie par trois rotations successives d'angle $\alpha_i$, autour de $\overrightarrow{e_i}(i = 1, 2, 3)$. (angles d'Euler)

On définit le vecteur vitesse de rotation du repère $\Re$ par rapport au repère $\Re_0$ par :

$$\overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_0) = \sum_{i=1}^{3} \dot{\alpha}_i \overrightarrow{e_i}$$

Alors :

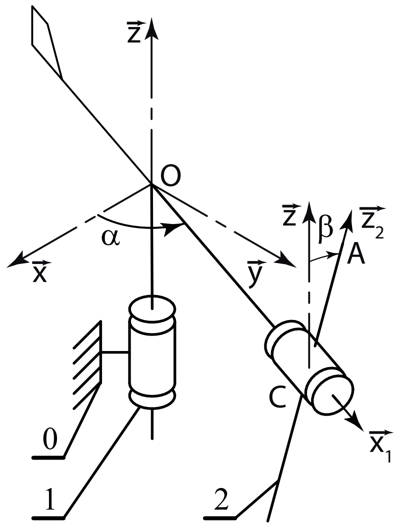
$$\left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right|_{\Re} + \overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_0) \wedge \overrightarrow{u}$$

Dans le cas des angles d'Euler :

$$\overrightarrow{\Omega}(\Re/\Re_0) = \dot{\psi}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}\overrightarrow{u} + \dot{\varphi}\overrightarrow{z_2}$$

# 4 Application : Eolienne

Soit $\Re(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ un repère lié au support 0 d'une éolienne. La girouette 1 a une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z})$ avec le support 0.
Soit $\Re_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z})$ un repère liée à la girouette 1. On pose $\alpha = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y_1})$ autour de $\overrightarrow{z}$.
L'hélice 2 a une pivot d'axe $(C, \overrightarrow{x_1})$ avec la girouette 1, tel que $\overrightarrow{OC} = a.\overrightarrow{x_1}$ ($a$ est une constante positive).
Soit $\Re_2(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ un repère lié à l'hélice 2, tel que l'axe $(C, \overrightarrow{z_2})$ soit confondu avec l'axe $(AB)$ de la pale de l'hélice. On pose $\overrightarrow{CA} = b.\overrightarrow{z_2}$ ($b$ est une constante positive) et $\beta = (\overrightarrow{z}, \overrightarrow{z_2})$.




1. Déterminer les vecteurs vitesses de rotations $\overrightarrow{\Omega}(1/0)$, $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$, $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$.
2. Calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(A/\Re)$
3. Calculer le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}(A/\Re)$