CALCUL VECTORIEL

1/ Espace et repérage :

1.1/ *Repère :*

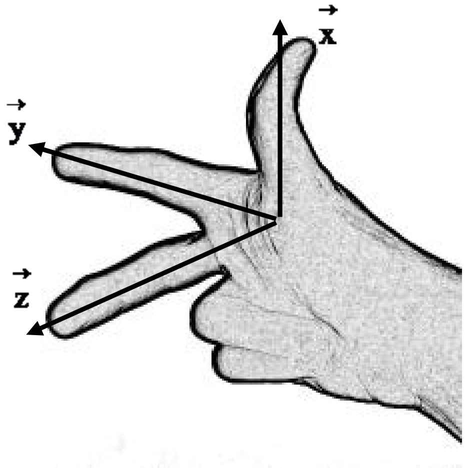
L'espace des points utilisé en mécanique newtonienne est de dimension 3. On appelle un **vecteur** $\vec{u}$ de cet espace une classe d'équivalence définie par : une *direction* ; un *sens* ; une *norme*.

Les directions de cet espace sont définies par une **base** $\mathscr{B}$ de trois vecteurs $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ orthonormée directe :

- $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont perpendiculaires deux à deux.
- Leur norme est unitaire : $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\| = 1$

Une base $\mathscr{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est dite d'orientation directe si elle s'inscrit sur les trois doigts de la main droite en respectant la convention :

- le vecteur $\vec{x}$ sur le pouce,
- le vecteur $\vec{y}$ sur l'index,
- le vecteur $\vec{z}$ sur le majeur.



Dans le cas contraire, la base est indirecte.

Un point origine O et une base $\mathscr{B}$ $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ forme un **repère** de l'espace : $\mathscr{R}$ $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

1.2/ *Composantes et coordonnées :*

Dans un espace muni d'une base $\mathscr{B}$ $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et d'un repère $\mathscr{R}$ $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, tout vecteur $\vec{V}$ de l'espace peut alors s'écrire de façon unique : $\vec{V} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$.

Les 3 quantités scalaires X, Y et Z sont les composantes de $\vec{V}$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

<u>Notations</u> : $\vec{V}(X,Y,Z)_B$ ou $\vec{V}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B$ ou $\vec{V}\ {}_B\left|\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right.$

Tout point M de l'espace est repéré par le vecteur $\vec{OM}$, dont on détermine les composantes dans la base $\mathscr{B}$. Ces composantes sont appelées les coordonnées de M relativement au repère $\Re$. Elles forment une suite de trois scalaires.

<u>Notations</u> : $M(X,Y,Z)_R$ ou $M\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_R$ ou $M\ {}_R\left|\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right.$

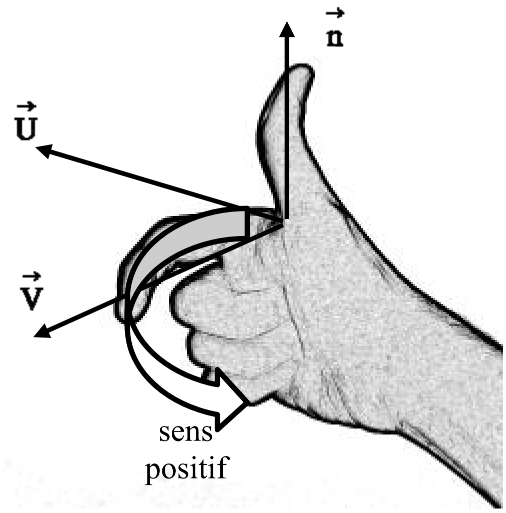
<u>Pointeur :</u>

Un vecteur n'est pas lié à un point. L'ensemble d'un point origine M et d'un vecteur est appelé un **<u>pointeur</u>**. On note : $\vec{P} = \{M, \vec{V}\}$.

1.3/ *Angle de deux vecteurs :*

Pour déterminer l'angle de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, on considère leur représentant de même origine.
Si les vecteurs ont même support et même sens, l'angle des deux vecteurs est nul.
Si les vecteurs ont même support et sont de sens contraire, l'angle des deux vecteurs vaut π.
Dans les autres cas, on considère le plan contenant les deux vecteurs, l'angle des deux vecteurs est alors égal à l'angle dont il faut faire tourner le premier pour l'amener sur le second.

Soit α l'angle géométrique entre $\vec{U}$ et $\vec{V}$ $(0 \leq \alpha \leq \pi.)$
Soit $\vec{n}$ un vecteur normal au plan contenant les deux vecteurs.
Alors, $\vec{n}$ définit l'orientation des angles dans ce plan : si $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{n})$ direct, alors $(\vec{U}, \vec{V})$ positif ; négatif, sinon.



(règle du pouce de la main droite ou du tire bouchon)

2/ Produit scalaire :

Le produit scalaire est une opération entre deux vecteurs dont le résultat est un scalaire.
(On appelle scalaire un élément de l'ensemble des réels.)

2.1/ *Définition géométrique :*

A tout couple de vecteurs $(\vec{U}, \vec{V})$, tel que α soit l'angle de ces deux vecteurs, on fait correspondre le scalaire : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| . \|\vec{V}\| .\cos\alpha$.

2.2/ *Propriétés :*

- Cas de nullité : un des vecteurs est nul ou les deux vecteurs sont perpendiculaires.
- Carrée scalaire : $\vec{V}^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = \|\vec{V}\|^2$.
- Symétrie : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$.
- Distributivité par rapport à l'addition vectorielle : $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$.
- Bilinéaire : $\vec{U} \cdot (\lambda \vec{V}) = \lambda(\vec{U} \cdot \vec{V}) = (\lambda \vec{U}) \cdot \vec{V}$.

2.3/ *Définition analytique :*

Une base dite orthonormée si chacun des vecteurs qui la constitue est de module **1** et si les vecteurs de base sont perpendiculaires deux à deux.

Dans une base orthonormée $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

- $\vec{x}^2 = \vec{y}^2 = \vec{z}^2 = 1$ et $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$.
- Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1(X_1,Y_1,Z_1)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{V}_2(X_2,Y_2,Z_2)_{\mathcal{B}}$ s'écrit :
  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$.
- Le produit scalaire de $\vec{V}$ avec l'un des vecteurs de base donne la composante de $\vec{V}$ sur ce vecteur.

3/ Produit vectoriel :

Le produit vectoriel est une opération entre deux vecteurs dont le résultat est un vecteur.

3.1/ *Définition :*

Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, pris dans cet ordre, est un vecteur noté : $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$.

Ce vecteur est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Le sens est tel que ($\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$) soit un trièdre direct. En appelant α l'angle ($\vec{U}$, $\vec{V}$), on a : $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.|\sin\alpha|$.

3.2/ *Propriétés :*

- Cas de nullité : un des vecteurs est nul ou les deux vecteurs sont colinéaires.
- Antisymétrie : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$.
- Distributivité par rapport à l'addition vectorielle : $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \wedge \vec{V}) + (\vec{U} \wedge \vec{W})$.
- Bilinéaire : $\vec{U} \wedge (\lambda \vec{V}) = \lambda(\vec{U} \wedge \vec{V}) = (\lambda \vec{U}) \wedge \vec{V}$.

3.3/ *Définition analytique :*

L'espace étant rapporté à une base $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le produit vectoriel de deux vecteurs de la base est :

- $\vec{x} \wedge \vec{x} = \vec{y} \wedge \vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{z} = \vec{0}$.
- $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$, $\vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x}$, $\vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y}$.
- $\vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z}$, $\vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x}$, $\vec{x} \wedge \vec{z} = -\vec{y}$.

Et le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1(X_1,Y_1,Z_1)$ et $\vec{V}_2(X_2,Y_2,Z_2)$ définis dans la base $\mathcal{B}$, s'écrit :

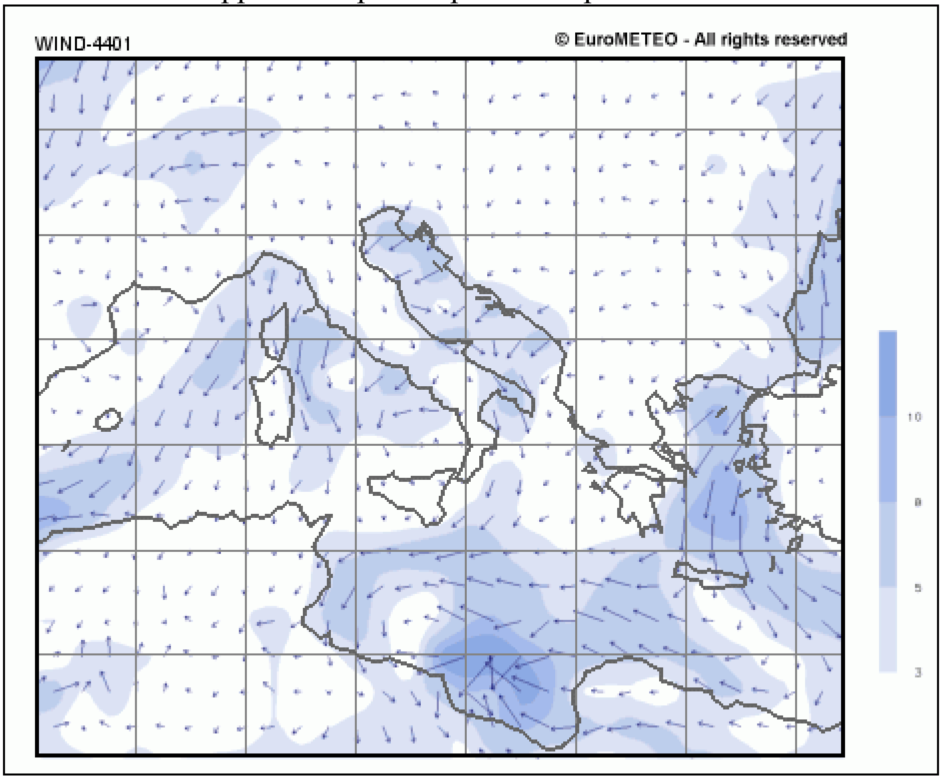
$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\vec{x} + (Z_1X_2 - X_1Z_2)\vec{y} + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\vec{z}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = {}_B\left|\begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{matrix}\right. \wedge {}_B\left|\begin{matrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{matrix}\right. = {}_B\left|\begin{matrix} Y_1Z_2 - Z_1Y_2 \\ Z_1X_2 - X_1Z_2 \\ X_1Y_2 - Y_1X_2 \end{matrix}\right. .$$

4/ Champ de vecteurs :

4.1/ *Définition :*

Un champ de vecteurs est une application qui à tout point A de l'espace fait correspondre un vecteur, noté $\vec{V}_A$. Cette application peut dépendre de paramètres scalaires comme le temps par exemple.



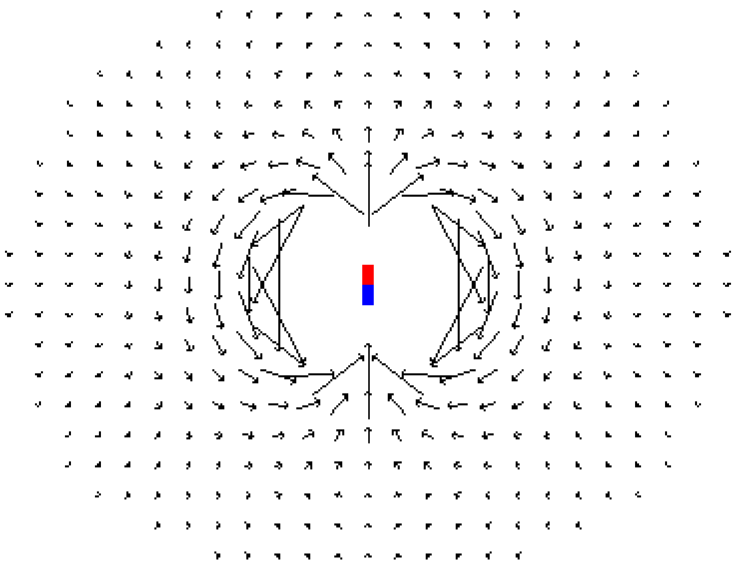
Seuls les vecteurs associés à certains points sont représentés ici. Mais il existe des vecteurs en tout point.

Remarque : Un vecteur $\vec{V}_A$ d'un champ de vecteur est donc un **pointeur** lié au point A.

4.2/ *Exemples de champ de vecteurs :*

Champ de vecteurs nul : L'application donne toujours un vecteur nul.

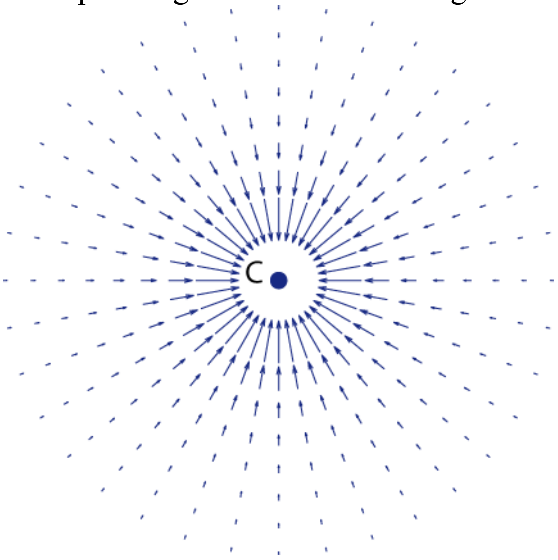
Champ de vecteurs stationnaire : L'application ne dépend pas du temps.

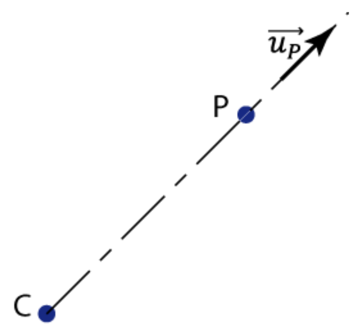


Champ de vecteurs uniforme : L'application ne dépend pas du point A.
Exemple : la gravité à l'échelle locale.

Champ de vecteurs central de centre C :
Tous les vecteurs du champ sont orientés vers un centre C.

Exemple : la gravité à l'échelle du globe





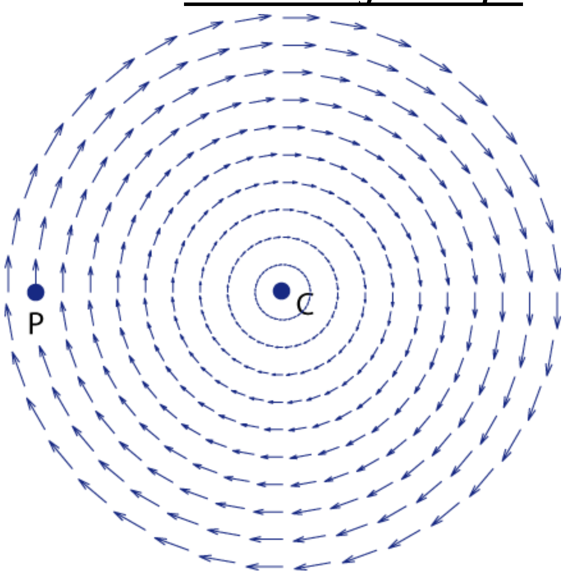
$\overrightarrow{g_P} = -g_P\overrightarrow{u_P}$

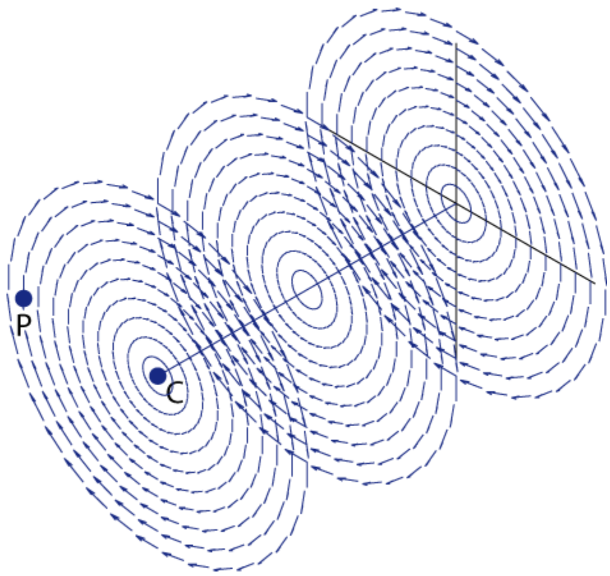
$\overrightarrow{u_P} = \frac{\overrightarrow{CP}}{CP}$ (vecteur unitaire de la direction radiale) et $g_P = \frac{G.m_C}{CP^2}$

Le champ est défini par le point C (sa position) et d'une constante $G.m_C$ (G : constante de gravitation)

5/ Champ des moments d'un pointeur :

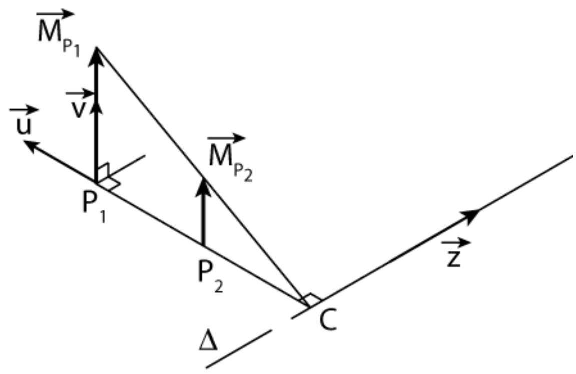
5.1/ *Présentation géométrique*





Le champ « tourne » autour d'un axe appelé axe central.

Notons $\vec{z}$ unitaire direction de l'axe central (direction axiale) et $\vec{u}$ la direction radiale.
$\overrightarrow{M_P}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et à l'axe central. $\overrightarrow{M_P}$ de direction $\vec{z}\Lambda\vec{u}$
$\overrightarrow{M_P}$ augmente quand CP augmente.



$\overrightarrow{M_P} = R.\vec{z}\wedge CP.\vec{u}$

$R.\vec{z} = \vec{R}$ est une constante caractérisant le champ appelée résultante.
Le champ est défini par une droite (C,$\vec{z}$), et un scalaire R.

Remarque : sens de rotation défini par la règle du pouce de la main droite.

5.2/ ***Définition analytique:***

Considérons un pointeur $\vec{P}$ défini par son origine O et le vecteur $\vec{R}$: $\vec{P} = \{O, \vec{R}\}$.

On définit le vecteur moment en un point A de $\vec{P}$ par :

$\vec{M}(A, \vec{P}) = \vec{M}(A, \{O, \vec{R}\}) = \vec{AO} \wedge \vec{R} = \vec{R} \wedge \vec{OA}$.

$\vec{M}(A, \vec{P})$ est aussi noté $\vec{M}_A(\vec{P})$.

Le vecteur $\vec{R}$ et le point O étant donnés, le vecteur moment dépend du point A.
L'ensemble des vecteurs moments forme un champ est appelé **champ des moments**.
Si le point A est sur le support (Δ) du pointeur, le moment en A est nul.

5.3/ ***Glisseur :***

Soit la droite (Δ) passant par O, de direction $\vec{V}$, appelée support de $\vec{P}$. Soit un autre pointeur $\vec{P}' = \{O', \vec{V}\}$, où O' sur (Δ). Calculons son moment au point A :

$\vec{M}_A(\vec{P}') = \vec{V} \wedge \vec{O'A} = \vec{V} \wedge (\vec{O'O} + \vec{OA}) = \vec{V} \wedge \vec{O'O} + \vec{V} \wedge \vec{OA} = \vec{V} \wedge \vec{OA} = \vec{M}_A(\vec{P})$.

Les deux pointeurs $\vec{P}$ et $\vec{P}'$ sont donc équivalents pour le moment en A. Une classe d'équivalence est constituée de tous les pointeurs ayant même vecteur et même support, appelée glisseur que l'on note : $\vec{G} = \{\Delta, \vec{V}\}$.

$$\vec{M}_A(\vec{G}) = \vec{M}_A(\vec{P}') = \vec{M}_A(\vec{P})$$

5.4/ ***Changement de point :***

Calculons le moment du glisseur $\vec{G} = \{D, \vec{V}\}$ en un point B : $\vec{M}_B(\vec{G}) = \vec{V} \wedge \vec{OB}$.

En faisant intervenir le point A, on a : $\vec{M}_B(\vec{G}) = \vec{V} \wedge (\vec{OA} + \vec{AB}) = (\vec{V} \wedge \vec{OA}) + (\vec{V} \wedge \vec{AB})$.

Soit : $\vec{M}_B(\vec{G}) = \vec{M}_A(\vec{G}) + (\vec{V} \wedge \vec{AB})$.

6/ LES TORSEURS

6.1/ *Définition :*

Un torseur τ est l'ensemble d'un champ des moments $\vec{M}$ et son vecteur $\vec{R}$. Le torseur τ se note au point A : $\tau = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$, $\vec{R}$ est appelé résultante et $\vec{M}_A$ moment au point A du torseur τ.

Aussi pour tout couple de points (A,B), nous avons :

$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AB}$.

Ou encore : $\vec{AB} \cdot \vec{M}_B = \vec{AB} \cdot \vec{M}_A$.

Cette relation caractérise l'équiprojectivité
du champ des moments d'un torseur.

$\vec{R}$ et $\vec{M}_A$ sont appelés éléments de réduction au point A du torseur τ.

Deux torseurs sont égaux s'ils ont les mêmes éléments de réduction en un même point.

6.2/ *Invariants du torseur :*

On appelle invariants d'un torseur les quantités qui restent constantes quel que soit le point d'expression.

- L'invariant vectoriel : la résultante $\vec{R}$ du torseur.
- L'invariant scalaire : la projection du moment du torseur sur la résultante $\vec{R} \cdot \vec{M}$.

  En effet, en un point B quelconque : $\vec{R} \cdot \vec{M}_B = \vec{R} \cdot (\vec{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AB})$, d'où : $\vec{R} \cdot \vec{M}_B = \vec{R} \cdot \vec{M}_A$.

6.3/ *Point central, axe central, moment central d'un torseur :*

1. Point central :

Un point de l'espace est central pour le torseur τ, si la résultante est colinéaire au moment en ce point.

Soit B est un point central, alors : $\vec{M}_B = \mu \vec{R}$, avec μ un réel.

Alors: $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AB}$, ou $\vec{M}_A = \vec{AB} \wedge \vec{R} + \mu \vec{R}$ (cette relation admet une infinité de solution)

2. Axe central : Ensemble des points centraux.

Montrons que les points centraux se trouvent sur une droite appelée axe central du torseur :

Si $\vec{R}$ est nul, le champ est uniforme, et tout point de l'espace convient (problème trivial).

Si $\vec{R}$ n'est pas nul, supposons le torseur est connu par ses éléments de réduction en B, un point central.

$\vec{M}_B = \mu \vec{R}$. Recherchons un autre point central B' de moment $\vec{M}_{B'} = \mu' \vec{R}$.

$\vec{M}_{B'} = \vec{M}_B + \vec{R} \wedge \vec{BB'}$ ➔ $\mu' \vec{R} = \mu \vec{R} + \vec{R} \wedge \vec{BB'}$

Donc $\vec{R}$ et $\vec{BB'}$ colinéaires (et $\mu' = \mu$)

Les points centraux forment une droite (Δ) appelée **Axe Central**, de direction $\vec{R}$.

3. Moment central :

Le moment central est la valeur du champ en un point central.
Le moment central d'un torseur est le même en tout point de l'axe central.
Le moment central est, en module, le moment minimum du torseur.

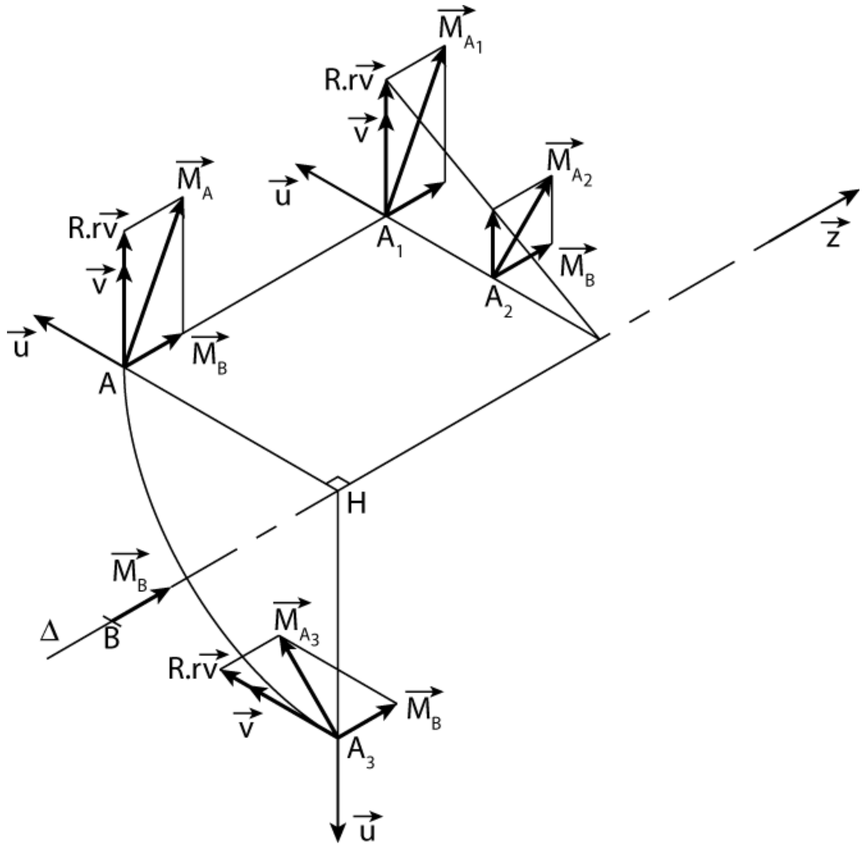
6.4/ ***Représentation spatiale d'un torseur :***

Soit un torseur $\boldsymbol{\tau}$ d'axe central (Δ). Posons : $\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \vec{R} = R\,\vec{z} \\ \vec{M}_B = M_B\,\vec{z} \end{Bmatrix}_B$, où B est point central.

En un point quelconque A de l'espace : $\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{R} \wedge \vec{BA}$.

En utilisant les coordonnées cylindrique selon Δ, on définit : $\vec{u}$, la direction radiale ; $\vec{z}$, la direction axiale ; $\vec{v}$, la direction orthoradiale, telle que ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$) soit orthonormée directe et r : la distance de A à Δ.

Posons : $\vec{BH} = h\,\vec{z}$ et $\vec{HA} = r\,\vec{u} \Rightarrow \vec{M}_A = M_B\,\vec{z} + R\,\vec{z} \wedge (h\,\vec{z} + r\,\vec{u}) = M_B\,\vec{z} + R.r\,\vec{v}$.



Le champ des moments de τ se construit par la somme de deux champs :

1. un champ uniforme $\vec{M}_B$
2. un champ $R.r\,\vec{v}$:

- de direction orthoradiale,
- de sens indiqué par les doigts de la main droite en posant le pouce selon $\vec{z}$,
- de norme proportionnelle à r.

❖ Soit A_1 tel que $\overrightarrow{AA_1} = \lambda\vec{R}$. On obtient $\overrightarrow{M_{A_1}}$ par translation $\lambda\vec{R}$ de $\overrightarrow{M_A}$

❖ Soit A_2 tel que $\overrightarrow{A_1A_2} = -\frac{r}{2}\vec{u}$. On obtient $\overrightarrow{M_{A_2}}$ par homothétie d'axe Δ, à partir de $\overrightarrow{M_{A_1}}$

❖ Soit A_3 l'image de A par une rotation d'axe Δ et d'angle $\pi/2$. On obtient $\overrightarrow{M_{A_3}}$ une rotation d'axe Δ et d'angle $\pi/2$ à partir de $\overrightarrow{M_A}$

6.5/ ***Opérations sur les torseurs :***

4. Addition :

Soient deux torseurs τ_1 et τ_2 définis au même point A : $\tau_1 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{1,A} \end{Bmatrix}_A$ et $\tau_2 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{2,A} \end{Bmatrix}_A$.

La somme de ces deux torseurs est un torseur τ, tel que : $\tau = \tau_1 + \tau_2 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{1,A} + \vec{M}_{2,A} \end{Bmatrix}_A$.

Le torseur nul $\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$, en tout point de l'espace, est noté : $\{0\}$.

L'ensemble des torseurs a une structure de groupe additif commutatif (abélien) pour l'addition.

5. Comoment (produit) de deux torseurs :

Le comoment de deux torseurs τ_1 et τ_2 est un scalaire : $\tau_1 \,.\, \tau_2 = \vec{R}_1 \,.\, \vec{M}_{2,A} + \vec{R}_2 \,.\, \vec{M}_{1,A}$.

Calculons cette expression en un point B :

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 \,.\, \vec{M}_{2,B} + \vec{R}_2 \,.\, \vec{M}_{1,B} &= \vec{R}_1 \,.(\vec{M}_{2,A} + \vec{R}_2 \wedge \vec{AB}) + \vec{R}_2 \,.(\vec{M}_{1,A} + \vec{R}_1 \wedge \vec{AB}). \\ &= \vec{R}_1 \,.\, \vec{M}_{2,A} + (\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{AB}) + \vec{R}_2 \,.\, \vec{M}_{1,A} + (\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{AB}). \\ &= \vec{R}_1 \,.\, \vec{M}_{2,A} + \vec{R}_2 \,.\, \vec{M}_{1,A}. \end{aligned}$$

Donc ce comoment ne dépend pas du point de calcul. La seule condition est de prendre les moments au même point pour chacun des torseurs.

6.6/ ***Torseur associé à un ensemble de glisseurs :***

6. Ensemble fini de glisseurs :

Soit un ensemble fini de n glisseurs $\vec{G}_i = \{D_i, \vec{V}_i\}$. On peut associer à cet ensemble, en un point A, le torseur : $\tau(\vec{V}_i) = \begin{Bmatrix} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i \\ \vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} (\vec{V}_i \wedge \vec{O_i A}) \end{Bmatrix}_A$.

7. Ensemble infini de glisseurs :

Soit $\vec{F}(M)$ un champ de vecteurs défini en tout point M d'un domaine **S**, relativement à la mesure μ. On peut associer, en un point A, à l'ensemble infini de glisseurs $\vec{G} = \{D, \vec{F}(M)\}$, (D) axes des glisseurs passant par les point M,

le torseur : $\tau[\vec{F}(M)] = \begin{Bmatrix} \vec{R} = \int_{M \in S} \vec{F}(M).d\mu \\ \vec{M}_A = \int_{M \in S} [\vec{F}(M) \wedge \vec{MA}].d\mu \end{Bmatrix}_A$.

Remarques :

- Dans la pratique, $\vec{F}(M)$ est une densité linéique, surfacique, volumique ou de force. Mais elle peut également représenter, en cinétique, un champ de vecteurs vitesse ou accélération.
- La mesure μ est soit une mesure de longueur, de surface, de volume ou de masse.

6.7/ *Torseurs particuliers :*

8. Torseur à résultante (glisseur) :

Un glisseur est un torseur dont le moment central est nul :

$$\tau = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \text{, avec } \vec{R} \neq \vec{0} \text{ et } B \in (\Delta) \text{ : axe central du torseur.}$$

Le torseur $\tau = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$, avec $\vec{R} \neq \vec{0}$ et $\vec{M}_A \neq \vec{0}$, est un glisseur si $\vec{R} \perp \vec{M}_A$.

9. Torseur couple :

Un couple est un torseur dont la résultante est nulle : $\tau = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$, avec $\vec{M}_A \neq \vec{0}$.

Le moment d'un couple est le même en tout point de l'espace : $\forall A, \forall B : \vec{M}_A = \vec{M}_B$.

10. Décomposition d'un torseur quelconque

Tout torseur $\tau = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$ quelconque peut se décomposer en deux torseurs , l'un à résultante, l'autre torseur couple.

$$\tau = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$$