Outils de modélisation

1 Modèles et Réel : Méthodes utilisées

1.1 Modéliser le comportement

Modéliser consiste à associer à la réalité une représentation abstraite (mathématique) en vue de l'étudier et de la maitriser. La réalité étant très complexe, il n'est possible de modéliser qu'une représentation simplifiée. Ces simplifications sont appelées des **hypothèses**. Dans ce premier cours, nous nous limiterons à des modèles basés sur la connaissance de la **structure du système** et sur des **comportements empiriquement** constatés.

1.2 Modèle de connaissance

On connait parfaitement le processus à piloter, c'est à dire l'équation de son comportement, et tous ses coefficients.

L'objectif est de prévoir le comportement réel à partir du modèle.

1.3 Modèle de représentation

Le système est inconnu. A partir de l'expérimentation, c'est-à- dire la mesure des ses entrées et sorties, on reconnait la nature de l'équation du comportement, puis il faut identifier tous ses coefficients.

L'objectif est d'identifier le modèle représentatif du comportement réel.

1.4 Usage des modèles

1.5 Les hypothèses

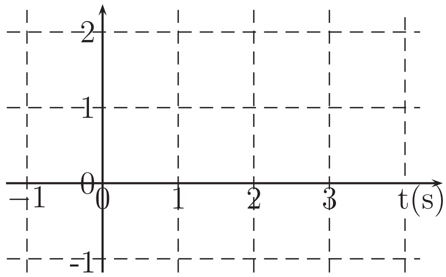
- Systèmes **continus** : les comportements évoluent de manière continu, sans discontinuité ;
- Systèmes **invariants** : les propriétés du système ne varient par au cours du temps. Les coefficients des équations différentielles sont indépendantes du temps ;
- Systèmes **linéaires** : les coefficients des équations de comportements sont des constantes

Dans le cadre du cours, on se borne aux systèmes continus, linéaires et invariants

2 Excitations : les signaux canoniques

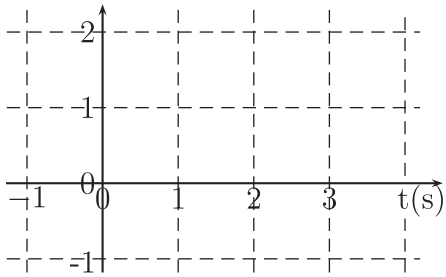
2.1 Fonction Impulsion ou de Dirac

Cette fonction est purement théorique car elle correspondrait à provoquer une impulsion physique d'intensité infinie durant un temps nul. :



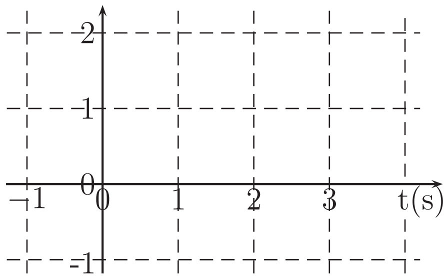
2.2 Fonction Echelon ou de Heaviside

On définit la fonction échelon $u(t)$, telle que



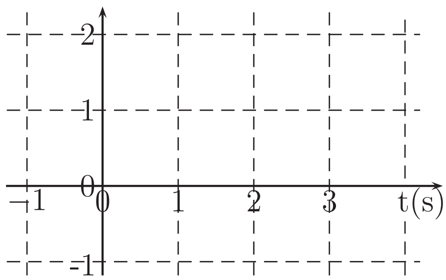
2.3 Fonction Rampe

Cette fonction correspond à une droite affine telle que :



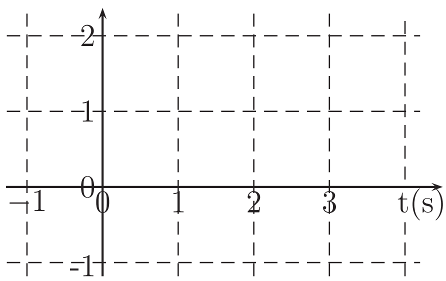
2.4 Fonction sinusoïdale

Ce signal est le signal de base pour l'étude fréquentielle des systèmes linéaires, il est appelé aussi signal harmonique.



2.5 Remarque : fonction avec retard

Un retard apparait quand un phénomène a lieu après un autre.



3 Transformation de Laplace

3.1 Définition et propriétés

L'objet de la transformation de Laplace est de modéliser des phénomènes et signaux qui évoluent au cours du temps. Or, dans le cadre d'une étude, nous ne nous intéresserons à ces évolutions qu'à partir de l'instant initial de l'étude ($t = 0s$). Nous considèrerons que :

- toutes les fonctions du temps $f(t)$ sont nulles $t < 0$. Ces fonctions sont dites causales :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t < 0 \\ f\left(t\right) si \ t \geq 0 \end{cases}$$

- La valeur de la fonction à l'instant initial $f(0^+)$ est appelée condition initiale. Sauf si elle est explicitement donnée, elle sera considérée comme nulle.

Alors, on appelle la fonction transformée de Laplace, la fonction F de la variable $\mathbf{p}$ (complexe) définie par :

$$F\left(\mathbf{p}\right) = \mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] = \int_0^\infty f\left(t\right).e^{-\mathbf{p}.t}dt$$

Avec $\mathbf{p} = \alpha + j.\omega$

3.2 Tableau des transformées

Soit $f(t)$ une fonction causale et $F(\mathbf{p})$ sa transformée dans le domaine de Laplace.

$f(t)$	$F\left(\mathbf{p}\right)$	$f(t)$	$F\left(\mathbf{p}\right)$
$\delta\left(t\right)$	1		
$K \cdot u\left(t\right)$	$\dfrac{K}{\mathbf{p}}$	$e^{-a.t} \cdot u\left(t\right)$	$\dfrac{1}{\mathbf{p}+a}$
$K.t \cdot u\left(t\right)$	$\dfrac{K}{\mathbf{p}^2}$	$\left(1 - e^{-\dfrac{t}{\tau}}\right) \cdot u\left(t\right)$	$\dfrac{1}{\mathbf{p}\left(1+\tau.\mathbf{p}\right)}$
$t^n \cdot u\left(t\right)$	$\dfrac{n!}{\mathbf{p}^{n+1}}$	$e^{a.t}t^n \cdot u\left(t\right)$	$\dfrac{n!}{\left(\mathbf{p}-a\right)^{n+1}}$
$sin(\omega.t) \cdot u\left(t\right)$	$\dfrac{\omega}{\mathbf{p}^2+\omega^2}$	$e^{-a.t}sin(\omega.t).u\left(t\right)$	$\dfrac{\omega}{\left(\mathbf{p}+a\right)^2+\omega^2}$
$cos(\omega.t) \cdot u\left(t\right)$	$\dfrac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2+\omega^2}$	$e^{-a.t}cos(\omega.t).u\left(t\right)$	$\dfrac{\mathbf{p}+a}{\left(\mathbf{p}+a\right)^2+\omega^2}$

$f(t)$	$F\left(\mathbf{p}\right)$
$\dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t\right) \cdot u\left(t\right)$ Avec $z < 1$	$\dfrac{1}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}\mathbf{p}+\dfrac{\mathbf{p}^2}{\omega_0^2}}$ Avec $z < 1$
$\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t+\varphi\right)\right) \cdot u\left(t\right)$ Avec $z < 1$, $\sin\varphi = \sqrt{1-z^2}$ et $\cos\varphi = z$	$\dfrac{1}{\mathbf{p}} \cdot \dfrac{1}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}\mathbf{p}+\dfrac{\mathbf{p}^2}{\omega_0^2}}$ Avec $z < 1$

3.3 Propriétés

3.3.1 Unicité

A $x(t)$ correspond $X(\mathbf{p})$ unique.
A $X(\mathbf{p})$ correspond $x(t)$ unique.

3.3.2 Linéarité

Soit f et g deux fonctions causales admettant des transformées de Laplace.

- Alors la fonction $f+g$ admet une transformée de Laplace et
$$\mathcal{L}[f+g](p) = \mathcal{L}[f](p) + \mathcal{L}[g](p)$$
- Quelque soit k constant appartenant à $\mathbb{R}$
$$\mathcal{L}[k \cdot f](p) = k \cdot \mathcal{L}[f](p)$$

3.4 Théorèmes

Soit $F(p) = \mathcal{L}\big[f(t) \cdot u(t)\big]$.

3.4.1 Théorème du retard

Si $F(p) = \mathcal{L}\big[f(t) \cdot u(t)\big]$, alors $\mathcal{L}[f(t-\tau) \cdot u(t-\tau)] = e^{-\tau p} F(p)$

3.4.2 Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Si les fonctions considérées ont des limites dans les conditions indiquées, on a :

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \to +\infty} pF(p) \qquad \text{(théorème de la valeur initiale)}$$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0^+} pF(p) \qquad \text{(théorème de la valeur finale)}$$

3.4.3 Transformée d'une dérivée et d'une intégrale

Théorème de la dérivation première :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df\,(t)}{dt}\right] = \mathbf{p} \cdot F\,(\mathbf{p}) - f\left(0^+\right)$$

Théorème de la dérivation seconde :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f\,(t)}{dt^2}\right] = \mathbf{p}^2 \cdot F\,(\mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot f\left(0^+\right) - \dot{f}\left(0^+\right)$$

Théorème de l'intégrale première :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f\,(u)\,du\right] = \frac{F\,(\mathbf{p})}{\mathbf{p}}$$

4 Modèle de connaissance

4.1 Systèmes dynamiques et fonction de transfert

Soit un système dont le comportement dynamique est décrit par l'équation différentielle : où $n \geq m$,

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + ... + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + ... + b_0 e(t)$$

Pour des conditions initiales nulles, on a, dans l'espace de Laplace :

$$\begin{aligned} S(\mathbf{p})\left[a_n \mathbf{p}^n + ... + a_0\right] &= E(\mathbf{p})\left[b_m \mathbf{p}^m + ... + b_0\right] \\ S(\mathbf{p}) \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{p}^i &= E(\mathbf{p}) \sum_{j=0}^{m} b_j \mathbf{p}^j \end{aligned}$$

On appelle transmittance ou fonction de transfert la fonction $H(\mathbf{p})$ tel que :

$$E(\mathbf{p}) \cdot H(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p})$$

Représentation graphique :

$$H(\mathbf{p}) = \frac{S(\mathbf{p})}{E(\mathbf{p})} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} b_j \mathbf{p}^j}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \mathbf{p}^i}$$

- $H(\mathbf{p})$ est appelée fonction de transfert (du comportement ou de l'organe considéré) ;
- $H(\mathbf{p})$ est indépendante des entrées et des sorties ;
- $H(\mathbf{p})$ ne dépend que de la variable $\mathbf{p}$.

4.2 Propriétés des fonctions de transfert :

Utilité :

Définitions :

- Ordre d'une fonction de transfert : l'ordre du polynome au dénominateur de celle-ci. On distigue :
  - ⋆ une fonction de transfert canonique : son numérateur est une constante.
  - ⋆ une fonction de transfert généralisé : son numérateur est un polynome d'ordre ≥ 1.
- Classe d'une fonction de transfert : la plus petite puissance de p dans le dénominateur.
- Pôles d'une fonction de transfert : racines du dénominateur de la fonction de transfert.
- Zéros d'une fonction de transfert : racines du numérateur de la fonction de transfert.

4.3 Méthode de résolution

4.3.1 Présentation

4.3.2 Application à la résolution d'équations différentielles linéaires.

Méthode : Le système physique a un comportement régit par l'équation différentielle linéaire de la forme :

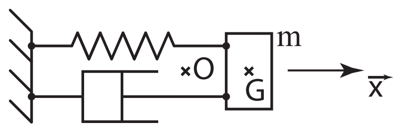
$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + ... + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + ... + b_0 e(t)$$

où e(t) et s(t) sont deux fonction du temps t.

1. Transformation des différents termes de l'équation différentielle en leur transformée de Laplace, avec conditions initiales nulles :
   L $\left[a_i \frac{d^i s}{dt^i}\right] = a_i.p^i.S(p)$ et L $\left[b_j \frac{d^j e}{dt^j}\right] = b_j.p^j.E(p)$
2. Ecriture de l'équation différentielle dans le domaine de Laplace : $S(p) = E(p)\frac{\sum\limits_{j=0}^{m} b_j p^j}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i}$
3. Transformation de $e(t)$ en $E(p)$.
4. Détermination de $S(p)$ sous la forme d'une somme de fonctions apparaissant dans le tableau de transformées.
5. Transformation inverse de chaque terme (tableau de transformées) : $s(t) = \cdots$

4.3.3 Application

Une masse m et de centre de gravité G, glisse horizontalement. Elle est relié au bâti par l'intermédiaire d'un ressort de raideur K et d'un amortisseur de coefficient c, et est soumise à un effort extérieur $Fe(t)$ horizontal. On étudie son mouvement horizontal dans un repère , où O correspond à la position de G lorsque le ressort a sa longueur à vide. On note : $x(t)$ la position de G.



1. Donner la fonction de transfert de $Fe(\mathbf{p})$ vers la position $X(\mathbf{p})$.
2. Donner l'équation de $x(t)$ quand $Fe(t)$ est une impulsion d'amplitude F : $Fe(t) = F.\delta(t)$.