Comportements canoniques en temporel

1 Gain statique

Le comportement le plus simple que l'on puisse rencontrer est le cas où l'effet est proportionnel à la cause.

$$s(t) = K \cdot e(t) \qquad \qquad S\left(\mathbf{p}\right) = K \cdot E\left(\mathbf{p}\right)$$

$$H\left(\mathbf{p}\right) = K$$

2 Intégrale temporelle

Dans un schéma bloc, il peut apparaitre un comportement qui ne corresponde pas exactement à un organe, mais à un changement de perspective. Par exemple, le mouvement d'une masse est décrit par une accélération, une vitesse et une position en fonctions du temps. Le passage de l'un à l'autre se fait par une intégration par rapport au temps.

$$H\left(\mathbf{p}\right) = \frac{1}{\mathbf{p}}$$

3 Comportement temporel du système du premier ordre

3.1 Définition

On appelle un système du premier ordre canonique un système modélisé par l'équation différentielle :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

La fonction de transfert d'ordre 1, de classe 0, est associée :

$$H(\mathbf{p}) = \frac{K}{1 + \tau \mathbf{p}}$$

où : K > 0 : gain statique (en régime stationnaire) où : $\tau > 0$: constante de temps (en s ou en s/rad)

3.2 Réponses temporelles

3.2.1 à un échellon (réponse indicielle) e(t) = Au(t)

$$S(\mathbf{p}) = \frac{A}{\mathbf{p}} \frac{K}{1 + \tau \mathbf{p}} = \Rightarrow s(t) = AK(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Cinq caractéristiques à connaitre :

- •
- •
- •
- •
- •

3.2.2 à une impulsion (réponse impulsionnelle) $e(t) = A\delta(t)$

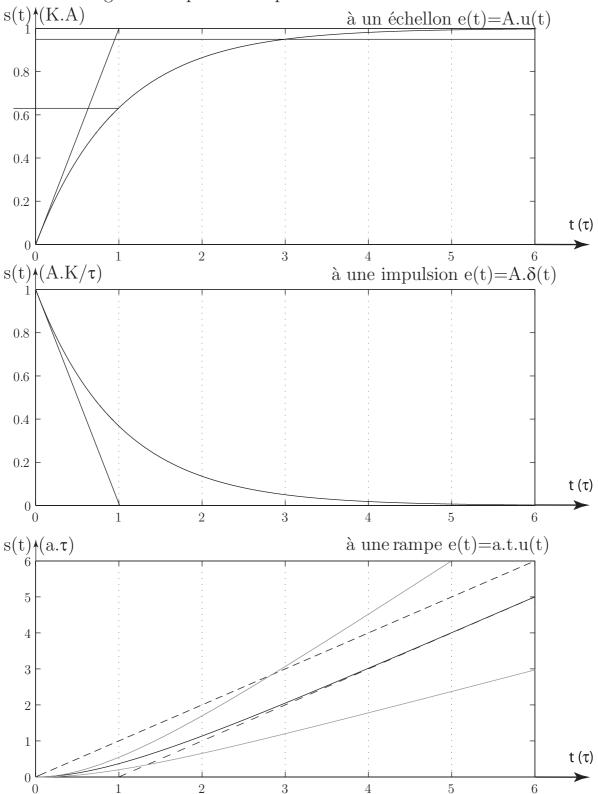
$$S(\mathbf{p}) = \frac{AK}{1 + \tau \mathbf{p}} = \frac{AK}{\tau} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \implies s(t) = \frac{AK}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

3.2.3 à une rampe $e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$

$$S(\mathbf{p}) = \frac{a}{\mathbf{p}^2} \frac{K}{1 + \tau \mathbf{p}} = a \cdot K \left(-\frac{\tau}{\mathbf{p}} + \frac{1}{\mathbf{p}^2} + \frac{\tau^2}{1 + \tau \mathbf{p}} \right)$$

$$s(t) = a \cdot K(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Figure 1: Réponses temporelles d'un 1° ordre



4 Comportement temporel du système du second ordre

4.1 Présentation

On appelle un système du second ordre canonique un système modélisé par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

La fonction de transfert d'ordre 2, de classe 0, est associée :

$$H(\mathbf{p}) = \frac{K}{1 + 2z\frac{\mathbf{p}}{\omega_0} + \frac{\mathbf{p}^2}{\omega_0^2}}$$

où : K > 0 : gain statique (en régime stationnaire)

où : $\omega_0 > 0$: pulsation propre non amortie (en rad/s)

où : z > 0 : coefficient d'amortissement

$$H(\mathbf{p})$$
 peut se réécrire : $H(\mathbf{p}) = \frac{K}{\left(\frac{\mathbf{p}}{\omega_0} + z\right)^2 + (1 - z^2)}$

4.2 Caractéristiques

On distingue trois cas, selon la nature des pôles :

- z > 1: Deux pôles réels, le régime est dit sur-amorti, ou apériodique
- $\bullet \ z=1$: Deux pôles réels doubles, le régime est dit critique
- \bullet z < 1: Deux pôles complexes conjugués, le régime est dit oscillant, sous-amorti, ou pseudo-périodique.

Cinq caractéristiques à connaitre :

- •
- •
- •
- •
- •
- •

4.3 Performance

<u>Stabilité</u>

La stabilité est intrinsèque à la définition d'un second ordre : $\omega_0 > 0$

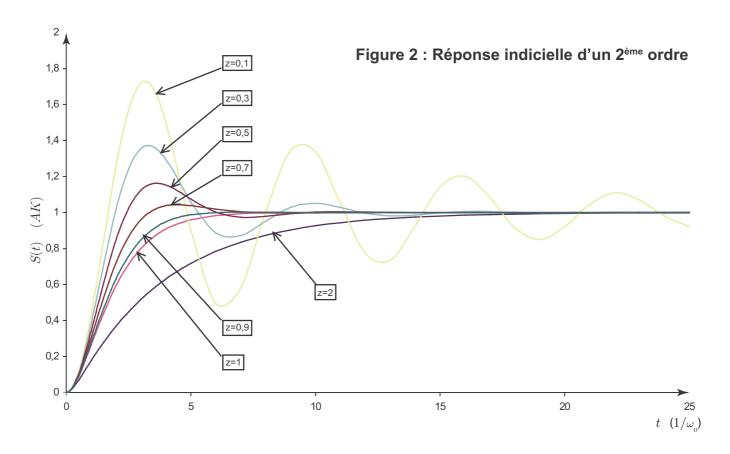
<u>Précision</u>:

L'erreur statique est liée à K.

rapidité :

Dans la réponse indicielle, l'instant où s(t) pénètre la fourchette $K\pm 0,05\%$ dépend de l'amplitude des oscillations, donc de l'amortissement z. (voir figure 3) Le temps de réponse dépend donc de l'amortissement et de la pulsation propre. Il est défini par la courbe (figure 4), présentant le temps de réponse réduit $(T_R.\omega_0)$ en fonction de z. On note les simplifications suivantes :

- $z > 2 : T_R.\omega_0 \simeq 6z$
- $z < 0.2: T_R.\omega_0 \simeq \frac{3}{z}$



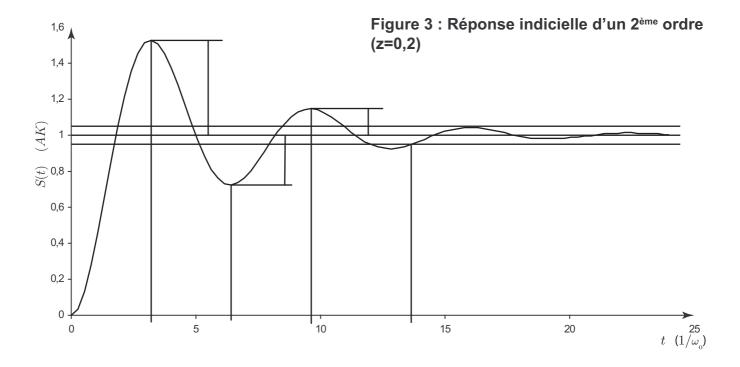


Figure 4 : Temps de réponse réduit d'un système du second ordre.

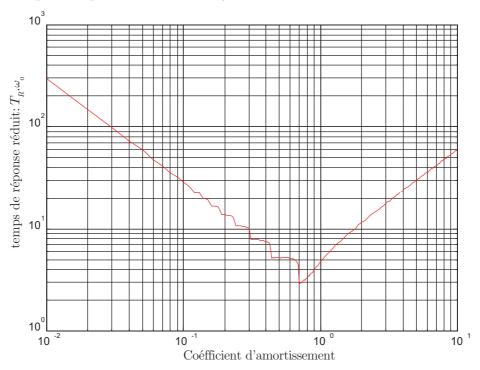
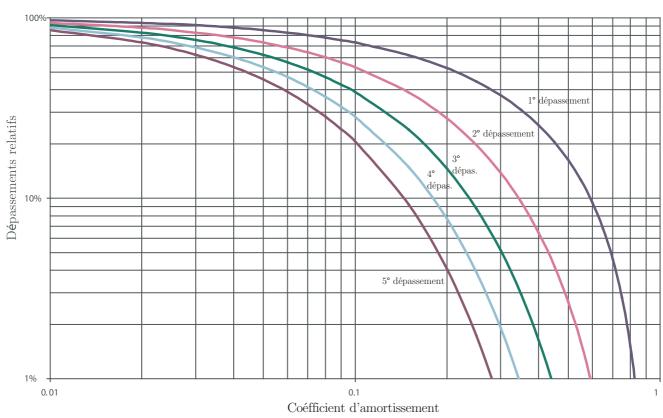
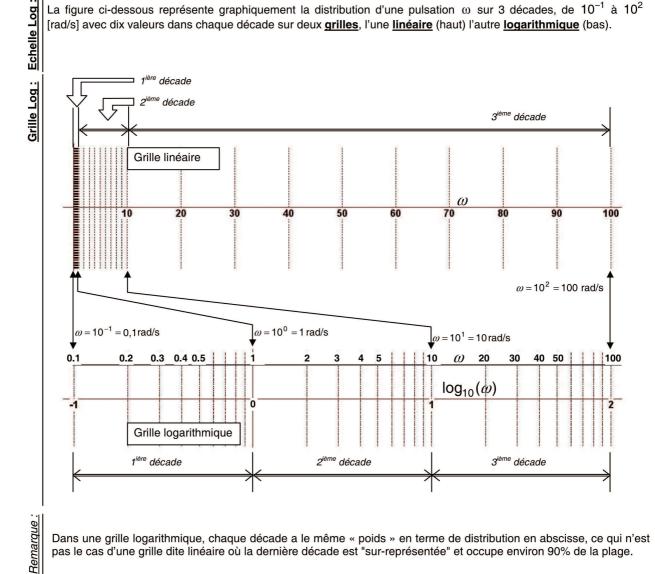


Figure 5 : Dépassements relatifs des transitoires



Annexe: échelle logarithmique

La figure ci-dessous représente graphiquement la distribution d'une pulsation ω sur 3 décades, de 10^{-1} à 10^2 [rad/s] avec dix valeurs dans chaque décade sur deux grilles, l'une linéaire (haut) l'autre logarithmique (bas).



Dans une grille logarithmique, chaque décade a le même « poids » en terme de distribution en abscisse, ce qui n'est pas le cas d'une grille dite linéaire où la dernière décade est "sur-représentée" et occupe environ 90% de la plage.

SI-PCSI 8 / 8 Lycée J. Perrin (13)