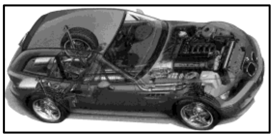
ANALYSE DES PERFORMANCES TEMPORELLES THEORIQUES

1/ Définitions : Fonctions de transfert d'un système asservi

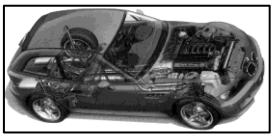
1.1/ *Exemple introductif : Régulateur de vitesse de voiture*

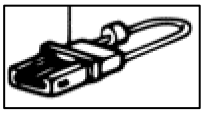
La vitesse d'un véhicule routier peut être pilotée humainement ou régulée automatiquement. Le passage d'un mode de fonctionnement à l'autre se fait par un simple appui sur un bouton.

Pilotage manuel :

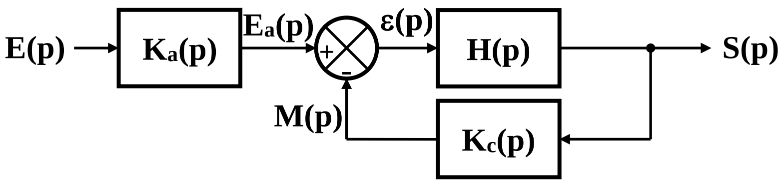


Régulation automatique :



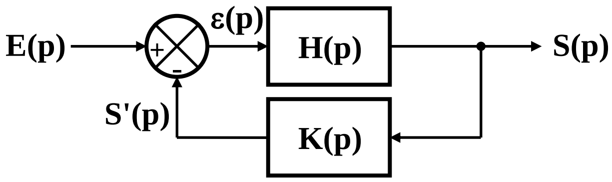


1.2/ *Cadre général en prépas : présence d'un gain adaptation*



1.3/ *Fonction de transfert en boucle fermée*

Soit un système asservi représenté par le schéma bloc ci-contre :

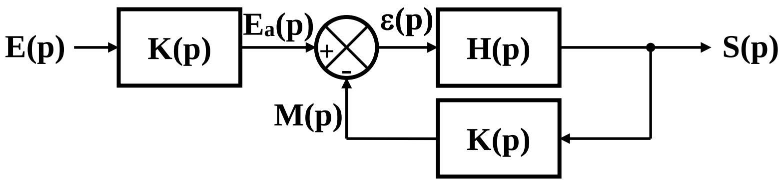


On note H(p) et K(p) les transmittances ou fonctions de transfert respectives de la chaîne directe et de la chaîne de retour.

L'utilisateur est surtout intéressé par le transfert global (Boucle Fermée) : $\boxed{H_{BF}(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{H(p)}{1+K(p)\,H(p)}}$ (Formule de Black)

$H_{BF}(p)$ est appelée Fonction de Transfert en Boucle Fermée (notée FTBF).

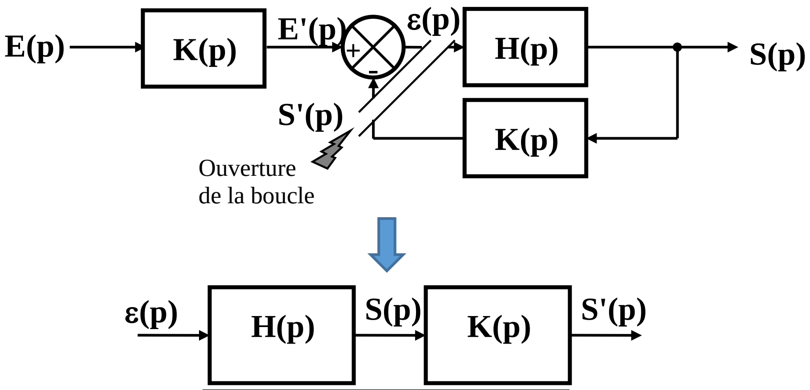
1.4/ *Système à retour unitaire*



On remarque que pour un système sous forme à retour unitaire, on a : $H_{BF}(p)=\dfrac{K(p)\,H(p)}{1+K(p)\,H(p)}$

1.5/ ***Fonction de transfert en boucle ouverte***

On définit la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) comme le rapport ente l'image de la sortie S'(p) et l'écart ε(p) :



$$\boxed{H_{BO}(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = K(p)\,H(p)}$$

Elle correspond à l'ouverture de la boucle, soit sa coupure au niveau du comparateur. C'est le produit des fonctions de transfert des chaînes directe et de retour.

D'où la généralisation de l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée :

soit $$\boxed{H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)}}$$

2/ Analyse des performances temporelles d'un système asservi

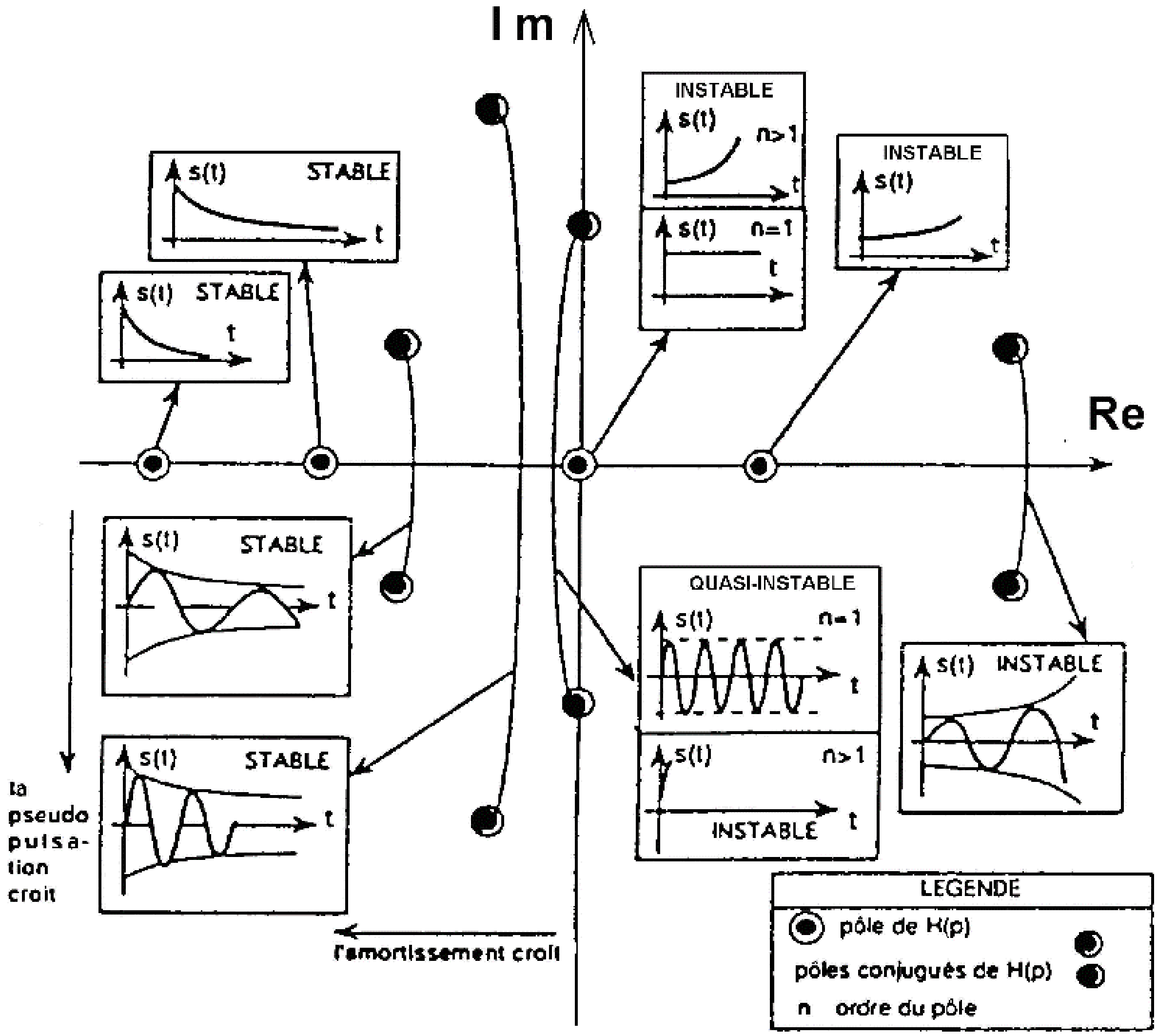
A partir du modèle de comportement (équation différentielle ou fonction de transfert), l'objectif est de calculer les performances d'un asservissement.

2.1/ ***Analyse à partir de la fonction de transfert***

Le comportement global d'un asservissement est connu, dans le domaine temporel, sous la forme d'une équation différentielle (où $n \geq m$) :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + b_0 x(t)$$

2.2/ *Pôles de la fonction de transfert et comportement*



2.3/ *Propriétés d'une la fonction de transfert*

$$H(p) = \frac{b_m p^m + \ldots + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_0} = \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)}$$

Où ($n \geq m$):

- $N(p)$ est un polynôme au numérateur, obtenu après factorisation, tel que $N(0) = 1$;
- $D(p)$ est un polynôme au dénominateur, obtenu après factorisation, tel que $D(0) = 1$;

Alors, on définit :

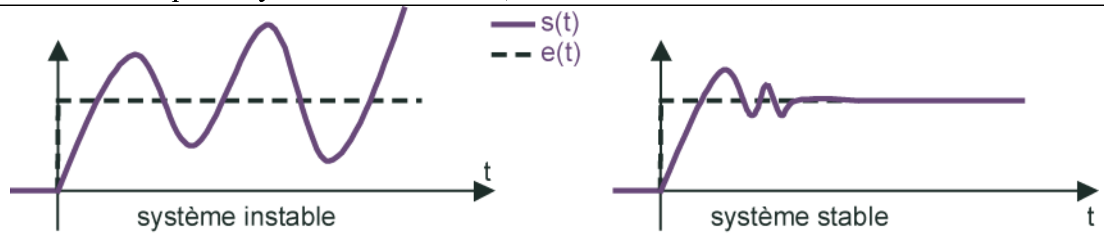
- **Ordre** : l'ordre du dénominateur de la fonction de transfert ;
- **Classe** : l'ordre de la plus petite puissance de p dans le dénominateur ;
- **Pôles** : les racines du dénominateur de la fonction de transfert ;
- **Zéros** : les racines du numérateur de la fonction de transfert.

3/ Etude de la stabilité

3.1/ *Définition*

La **stabilité** d'un système est la capacité à converger vers une valeur constante lorsque l'entrée est constante, et en l'absence de perturbation.

On dit qu'un système est stable si, à une entrée bornée, la sortie est bornée.



3.2/ *Méthodes d'analyse*

a) Calcul des pôles

L'aptitude à converger peut être déterminée par la partie réelle des pôles.
Un asservissement est stable si les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée sont à partie réelle négative.

On peut facilement calculer les racines d'un polynôme grâce au module numpy de python.

```
import numpy.polynomial.polynomial as P
P.polyroots([a0, a1, a2])
```

ou

```
D=P.Polynomial([a0, a1, a2])
D.roots()
```

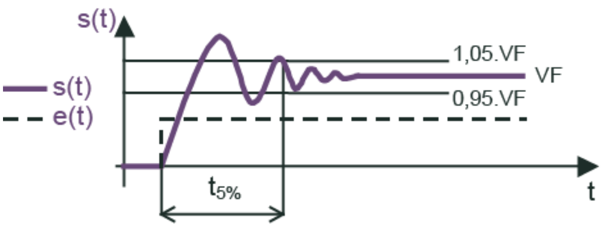
3.3/ *Critère quantifiable : l'amortissement*

La capacité à capacité à converger d'un asservissement dépend de la quantité d'oscillations présentes.
L'évolution des amplitudes des oscillations dépendent de z. On peut donc rencontrer des exigences exprimées sous la forme de critères quantifiables de stabilité :

- z : le coefficient d'amortissement ;
- $D_{\%}$: les dépassements relatifs, liés à z par l'abaque.

3.1/ Etude de la rapidité

En notant VF=$\lim_{t\to\infty} s(t)$, le temps de réponse T_R représente le temps nécessaire entre l'instant d'excitation et l'instant où la sortie entre dans la fourchette VF±5%.

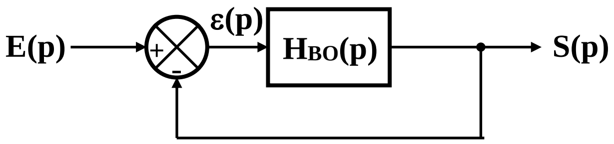


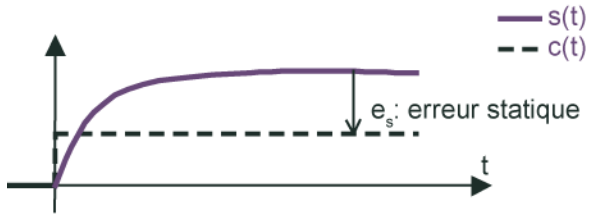
4/ Etude de la précision en poursuite

La précision est quantifiée par l'erreur entre la consigne et la sortie en régime permanant.

4.1/ *Démarche de détermination*

On se place dans la configuration à retour unitaire :





$$H_{BO} = \frac{KN(p)}{p^{\alpha}D(p)} \qquad et \qquad H_{BF} = \frac{H_{BO}}{1 + H_{BO}}$$

La précision dépend de la valeur atteinte en régime établi, et de la valeur à atteindre (la consigne).

- La consigne est donnée par l'utilisateur.
- La valeur atteinte en régime établi, ou valeur finale si elle existe, est obtenue pour $t \rightarrow \infty$.

Démarche de calcul : doivent être connu : $H_{BF}(p)$ ou $H_{BO}(p)$ et $E(p)$

On calcule :

$$S(p) = H_{BF}(p) \cdot E(p)$$

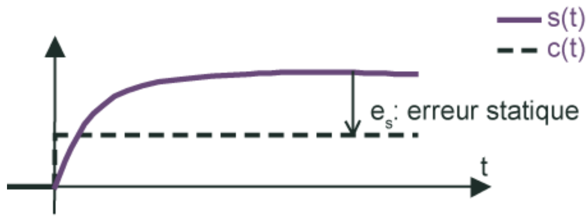
$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p)\big(1 - H_{BF}(p)\big) = E(p)\frac{1}{1 + H_{BO}(p)}$$

$$\varepsilon_f = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p \cdot \varepsilon(p)$$

a) Précision : erreur statique

L'erreur statique est définie par : $\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty} \varepsilon$ lorsque la consigne est un échelon d'amplitude A.

$$E(p) = \frac{A}{p}$$

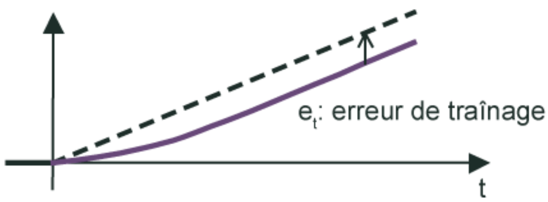


L'erreur relative est définie par $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_s}{A}$

b) Précision : erreur de trainage

L'erreur de trainage est définie par : $\varepsilon_t = \lim_{t\to\infty} \varepsilon$ lorsque la consigne est une rampe de penta a.

$$E(p) = \frac{a}{p^2}$$



4.2/ *Application*

Après simplification du modèle, un asservissement se ramène à un schéma bloc à retour unitaire, où :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$$

1) Déterminer l'erreur statique pour une entrée en échelon d'amplitude A. En déduire l'erreur relative.
2) Déterminer l'erreur de trainage lorsque l'entrée est une rampe de pente a.

4.1/ *Lien entre classe et erreur statique*

De manière générale, on peut déterminer l'erreur en précision d'un asservissement en fonction de la classe de sa fonction de transfert en BO (boucle ouverte).

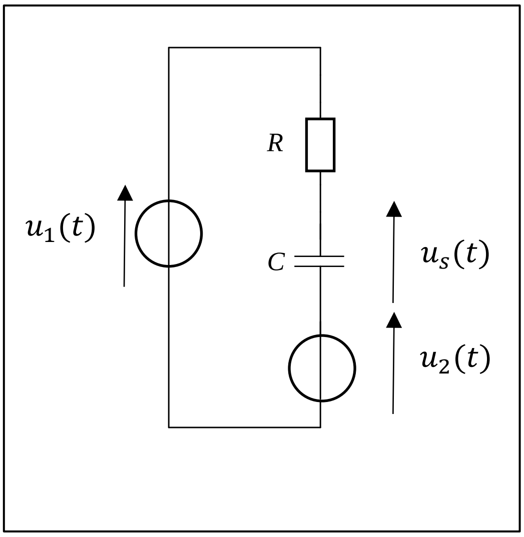
$$\begin{aligned}\varepsilon_f &= \lim_{p\to 0} p\cdot E(p)\frac{1}{1+H_{BO}(p)}\\ &= \lim_{p\to 0} p\cdot E(p)\frac{1}{1+\frac{KN(p)}{p^\alpha D(p)}}\\ &= \lim_{p\to 0} p\cdot E(p)\frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p)+KN(p)}\end{aligned}$$

$e(t)$	$E(p)$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
$u(t)$	$\frac{1}{p}$			
$t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$			
$t^2.u(t)$	$\frac{1}{p^3}$			

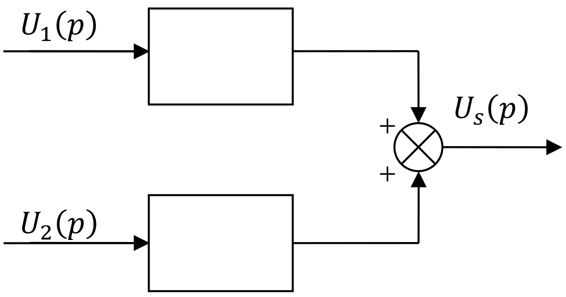
5/ Cas de la régulation

5.1/ *Exemple introductif : Circuit RC*

On considère le circuit RC ci-contre, où $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont deux tensions pilotées dépendantes du temps t. On cherche à déterminer l'expression de $U_s(p)$, transformée de Laplace de la tension $u_s(t)$.

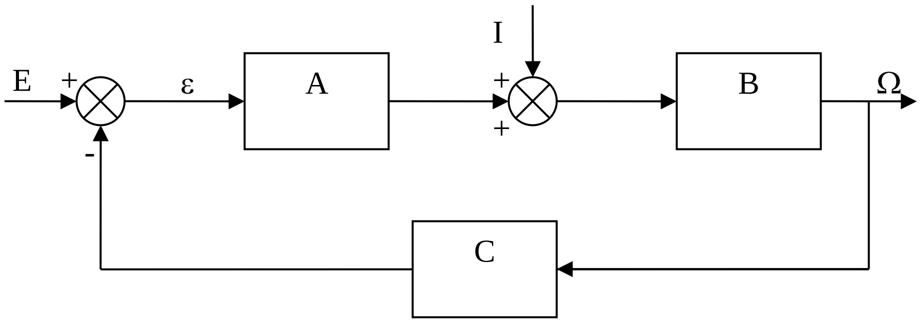


1) Justifier que l'équation différentielle associée à ce circuit électrique s'écrie :
$$RC\frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t) = u_1(t) - u_2(t)$$
2) Transformer l'équation différentielle dans le domaine de Laplace
3) Exprimer alors $U_s(p)$ sous la forme :
$$U_s(p) = A(p)U_1(p) + B(p)U_2(p)$$
(on déterminera les expressions de $A(p)$ et $B(p)$)
4) Compléter le schéma bloc ci-dessous.



5.2/ ***Principe de superposition***

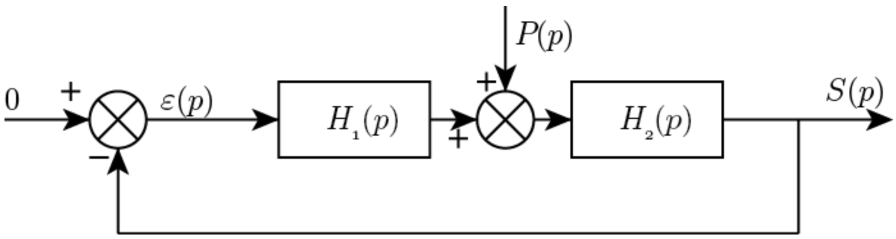
5.3/ ***Application***



Déterminer par le calcul les deux fonctions de transfert du système défini par le schéma fonctionnel précédent : $H_{E\Omega}(p) = \left.\frac{\Omega(p)}{E(p)}\right|_{I=0}$ et $H_{I\Omega}(p) = \left.\frac{\Omega(p)}{I(p)}\right|_{E=0}$.

5.4/ ***Précision en régulation***

On considère la régulation sous forme à retour unitaire ci-dessous :



Avec :

$$H_1(p) = \frac{K_1.N_1(p)}{p^{\alpha_1}D_1(p)} \; et \; H_2(p) = \frac{K_2.N_2(p)}{p^{\alpha_2}D_2(p)}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(p) &= E(p) - S(p) \\
&= -P(p)\frac{H_2(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)} \\
&= -P(p)\frac{K_2.N_2(p)\cdot p^{\alpha_1}D_1(p)}{p^{\alpha_1}D_1(p)\cdot p^{\alpha_2}D_2(p) + K_1.N_1(p)\cdot K_2.N_2(p)}
\end{aligned}$$

On remarque le terme p^{α_1} au numérateur. Un intégrateur en amont de la perturbation dans la boucle permet de rejeter une perturbation constante ou en échelon.

C'est le rôle du correcteur de type « proportionnel – intégral » ***PI***.