Introduction aux erreurs numériques

1 Exemple introductif

Prenons trois nombres réels, exprimés avec 3 chiffres significatifs :

$$\begin{aligned} x &= 5,11 \cdot 10^0 \\ y &= 4,28 \cdot 10^{-3} \\ z &= 3,43 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Calculons leur somme en arrondissant chaque nombre à la décimale la plus proche.

$$\begin{aligned} (x+y)+z &= \underbrace{5,11428 \cdot 10^0}_{5,11 \cdot 10^0} + 3,43 \cdot 10^{-3} \\ &\simeq 5,11343 \cdot 10^0 \\ &\simeq 5,11 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+(y+z) &= 5,11 \cdot 10^0 + 7,71 \cdot 10^{-3} \\ &= 5,11771 \cdot 10^0 \\ &\simeq 5,12 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

$$(x+y)+z \neq x+(y+z)$$

L'addition numérique n'est pas commutative à cause des erreurs d'approximation.

2 Notations des erreurs

On note :

- x : la valeur exacte à coder numériquement
- $\tilde{x}$: la valeur approximée, codée numériquement
- Δx : l'erreur absolue d'approximation
- Θx : l'erreur relative d'approximation $\frac{\Delta x}{x}$

avec : $|x - \tilde{x}| \leq \Delta x$

On notera par la suite :

$$\tilde{x} = x \pm \Delta x$$

«la valeur $\tilde{x}$ approximée de x est comprise ente $x - \Delta x$ et $x + \Delta x$. »

En utilisant l'erreur relative :

$$\tilde{x} = x\,(1 \pm \Theta x)$$

Le codage des flottants introduit une erreur numérique :

- $\Theta x = 5.10^{-4}$ en 16 bits
- $\Theta x = 10^{-7}$ en 32 bits
- $\Theta x = 10^{-16}$ en 64 bits

3 Propagation d'erreur

3.1 Sur l'addition

$$\begin{aligned}\widetilde{x+y} &= x \pm \Delta x + y \pm \Delta y \\ &= x + y \pm \left(\underbrace{\Delta x + \Delta y}_{\Delta x+y}\right)\end{aligned}$$

3.2 Sur la multiplication

$$\begin{aligned}\widetilde{x \times y} &= x\,(1 \pm \Theta x) \times y\,(1 \pm \Theta y) \\ &= x \times y \left(1 \pm \left(\underbrace{\Theta x + \Theta y + \Theta x \Theta y}_{\Theta x \times y}\right)\right)\end{aligned}$$

3.3 Sur l'inversion

Notons :

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

On cherche Δy connaissant Δx.
Or

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x^2} \\ dy &= -\frac{dx}{x^2} \\ \Delta y &\simeq \frac{\Delta x}{x^2} = \frac{\Theta x}{x}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= y \pm \Delta y \\ &= \frac{1}{x} \pm \frac{\Delta x}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} \pm \frac{\Theta x}{x}\end{aligned}$$