Algorithmes de résolution d'équation $f(x) = 0$

Méthodes de la dichotomie et de Newton

1 Méthode par dichotomie

Soit $f(x)$ une fonction monotone sur $[a, b]$ un intervalle contenant une racine de f.

1.1 Rappel de la méthode

Le principe est de diviser l'intervalle en deux parts égales, de conserver la partie contenant la racine et d'y reproduire l'opération jusqu'à ce que le critère de convergence soit satisfait.

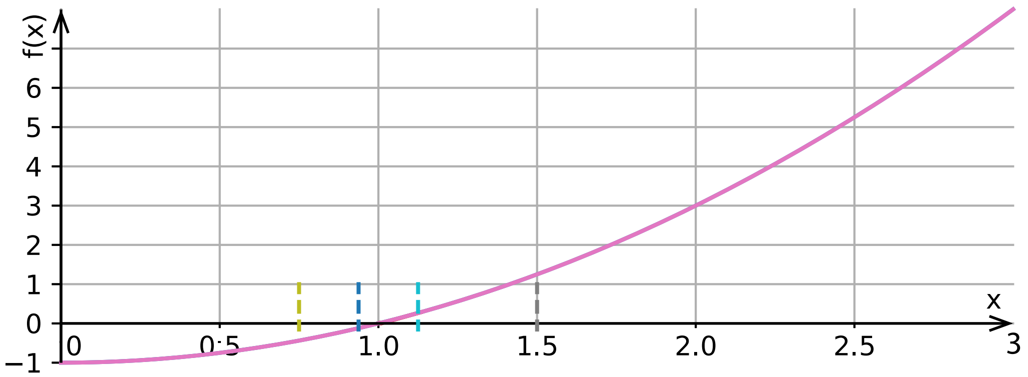


FIGURE 1 – Méthode de la dichotomie

A partir d'un intervalle donné $[a_i, b_i]$, encadrant une racine de la fonction f étudiée :

- Calculer le point c_i milieu de l'intervalle : $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$
- Evaluer $p_i = f(a_i) \times f(c_i)$
- tester :
  - si $p_i > 0$: il n'y a pas de racine dans l'intervalle $[a_i, c_i]$. La racine est donc dans l'intervalle $[c_i, b_i]$. On affecte alors à a_{i+1} la valeur de c_i
  - si $p_i < 0$: la racine est dans $[a_i, c_i]$. On affecte alors à b_{i+1} la valeur de c_i
  - si $p_i = 0$: alors la racine est c_i. (cas numériquement rarissime)
- test d'arrêt : Evaluer le critère de convergence
- Recommencer si le critère de convergence n'est pas satisfait

1.2 Mise en œuvre

La méthode s'applique :

-
-

Les données nécessaires sont :

1.3 Test d'arrêt

précision suffisante sur l'intervalle de la racine : $b_n - a_n \leq 2\varepsilon$
fonction suffisamment proche de zéro : $|f(c_n)| \leq \varepsilon$

1.4 Algorithme

Algorithme

Algorithme 1 : Méthode de la dichotomie

```
Entrées : f, a, b, ε
ai, bi ← a, b
fa, fb ← f(ai), f(bi)
tant que bi − ai > 2.ε faire
    ci ← (ai + bi)/2
    fc ← f(ci)
    si fa · fc ≤ 0 alors
        bi ← ci
        fb ← fc
    sinon
        ai ← ci
        fa ← fc
Sorties : (ai+bi)/2
```

2 Méthode de Newton

2.1 Principe

Le principe est d'approximer la fonction $f(x)$ par sa tangente en x. Soit $f(x)$ une fonction, et r une racine de l'équation $f(x) = 0$. Soit x_0 une valeur initiale (first guess).

L'équation de la tangente en x_0 est donnée par :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

La racine de cette équation est x_1. Déterminons x_1 :

$$\begin{aligned} y &= 0 = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

x_1 est une valeur approximée de la solution de l'équation $f(x) = 0$, en approximant la courbe par sa tangente. A partir de x_1, il est possible de trouver une valeur x_2 plus précise de la solution.

On définit alors la suite :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Cette suite converge (si elle converge) vers l tel que :

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)}$$

Où : $f(l) = 0$. l correspond bien à r la racine recherchée.

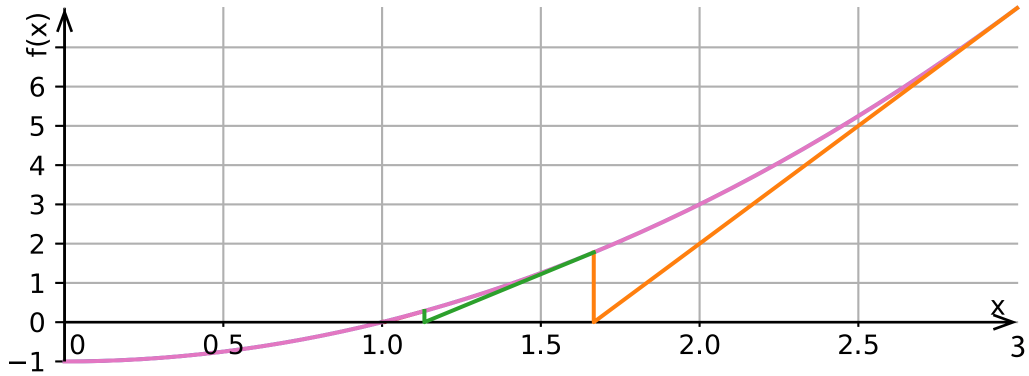


FIGURE 2 – Méthode de Newton

2.2 Mise en oeuvre

- Arguments en entrée :
  - — les expressions de $f(x)$ et de $f'(x)$,
  - — une valeur initiale x_0,
  - — un critère de précision ε,
  - — un nombre maximum d'itérations nb_{it}.
- Conditions d'arrêt :
  - — solution suffisamment proche de zéro $|f(x_i)| < \varepsilon$;
  - — l'algorithme ne converge pas : le nombre d'itération i a atteint une valeur maximale prédéfinie nb_{it}.

2.3 Algorithme

Algorithme

Algorithme 2 : Méthode de Newton

Entrées : $f, f', x_0, \varepsilon, nb_{it}$

$x_i \leftarrow x_0$
$fx \leftarrow f(x_i)$
tant que $|fx| > \varepsilon$ **faire**
    $fpx \leftarrow f'(xi)$
    si fpx=0 **alors**
        Sorties : *Erreur*
    sinon
        $xi \leftarrow xi - fx/fpx$
        $fx \leftarrow f(xi)$

Sorties : xi

3 Etude de cas

3.1 Comparaison Dichotomie - Newton

Les deux méthodes ont des conditions d'utilisation différentes. Néantmoins, il est possible de comparer la vitesse de convergence sur un exemple commun (figures 1 et 2).

itération	Dichotomie	Newton
1	1.5	1.6666666666666667
2	0.75	1.1333333333333333
3	1.125	1.007843137254902
4	0.9375	1.0000305180437934
5	1.03125	1.0000000004656613

3.2 Cas où la fonction a plusieurs racines

Considérons la fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ dont les racines sont $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)$ et $r_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$

Suivant le choix de x_0 la méthode de Newton va converger vers une de ces trois racines.

Graphiquement on illustre à gauche les choix de $x_0 = -0,3$; $x_0 = 0,2$ et $x_0 = 2$ et à droite la racine vers laquelle converge la méthode en fonction de x_0

Comme on le constate, une valeur de x_0 proche d'une racine donnée ne garantit aucunement la convergence vers cette racine, ce qui posera potentiellement des problèmes de validation des résultats.

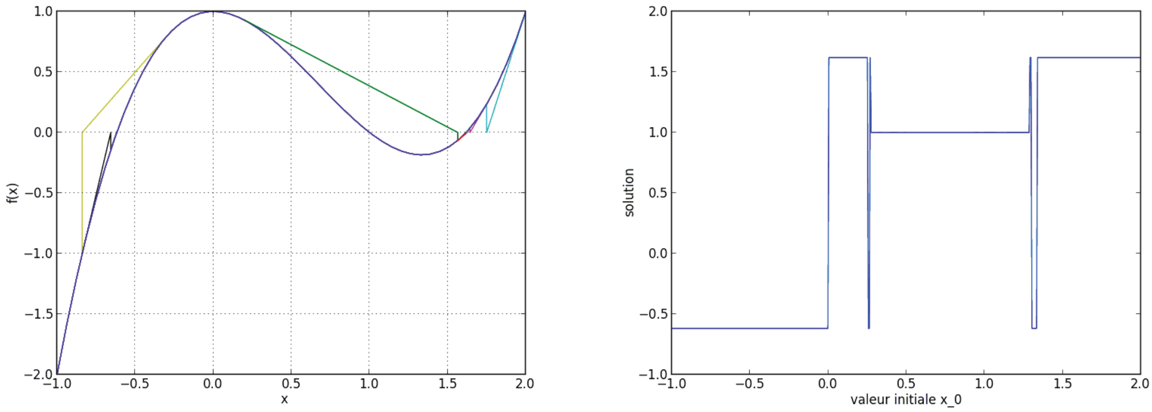


FIGURE 3 – Cas de racines multiples

3.3 Cas où la pente est très faible

L'algorithme n'est valable que si $f'(x_i)$ est non nulle.

Si c'est le cas, un message d'erreur apparait, qui est du type saturation de la mémoire, résultat de type `NaN` (`Not A Number`) ou `ZeroDivisionError: float division by zero`.

Numériquement, si $f'(x_i)$ est proche de zéro, alors la valeur x_{i+1} part à l'infini.

Illustrons ceci avec $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 0.4$ et $x_0 = 1$

- cette fonction n'a qu'une racine ;
- elle admet une pente nulle (et une valeur faible) en : $x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ ($f(x) = 0,0015$).

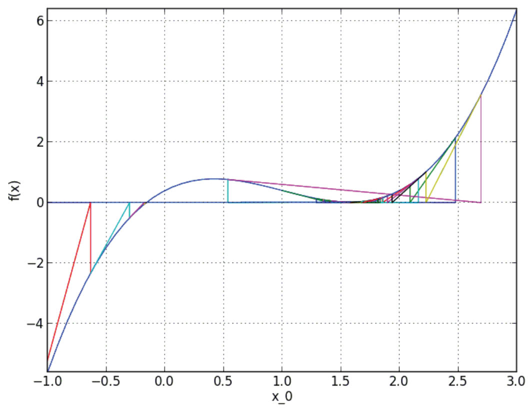


FIGURE 4 – Cas de non convergence

3.4 Cas d'oscillations

La fonction $f(x) = \arctan(x)$ admet une valeur particulière x_0 pour laquelle des oscillations se produisent :

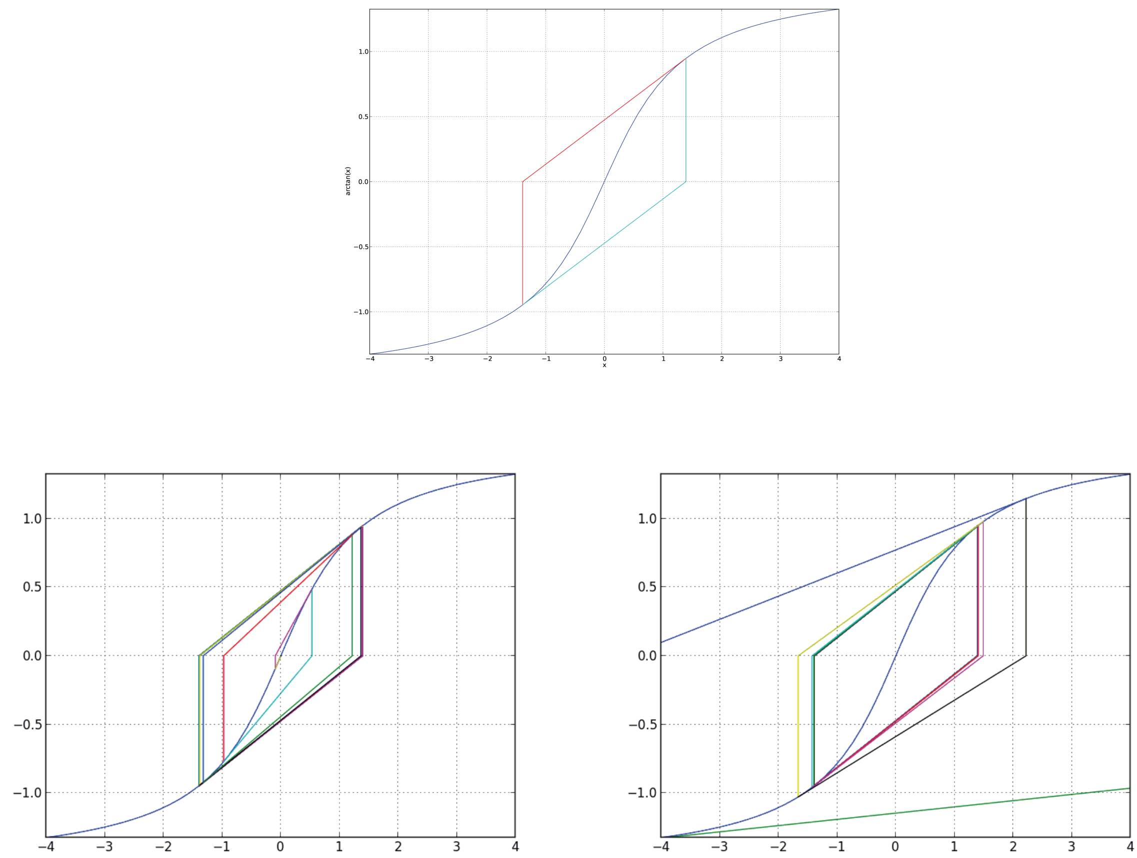


Figure 5 – Cas d'oscillations

3.5 Bilan

4 Pour aller plus loin

4.1 Utilisation d'une dérivée approchée

Occasionnellement, il sera trop fastidieux voire très difficile d'exprimer de manière exacte une dérivée. On pourra alors recourir à une dérivée numérique approchée, en l'approximant par un taux de variation.

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

La relation de récurrence s'écrit alors :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{(f'(x_i)} \approx x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

La mise en oeuvre de la méthode nécessitera alors deux valeurs initiales : x_0 et x_1.

4.2 Système d'équations

Il est possible d'étendre la méthode de Newton à la recherche de solutions de systèmes d'équations.

Considérons par exemple :

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - 1 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases}$$

On définit une fonction à deux variables et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 - 3xy^2 - 1 \\ 3x^2y - y^3 \end{bmatrix}$$

Sa matrice Jacobienne, constituée de ses dérivées partielles (sera étudiée en deuxième année en Mathématiques) est :

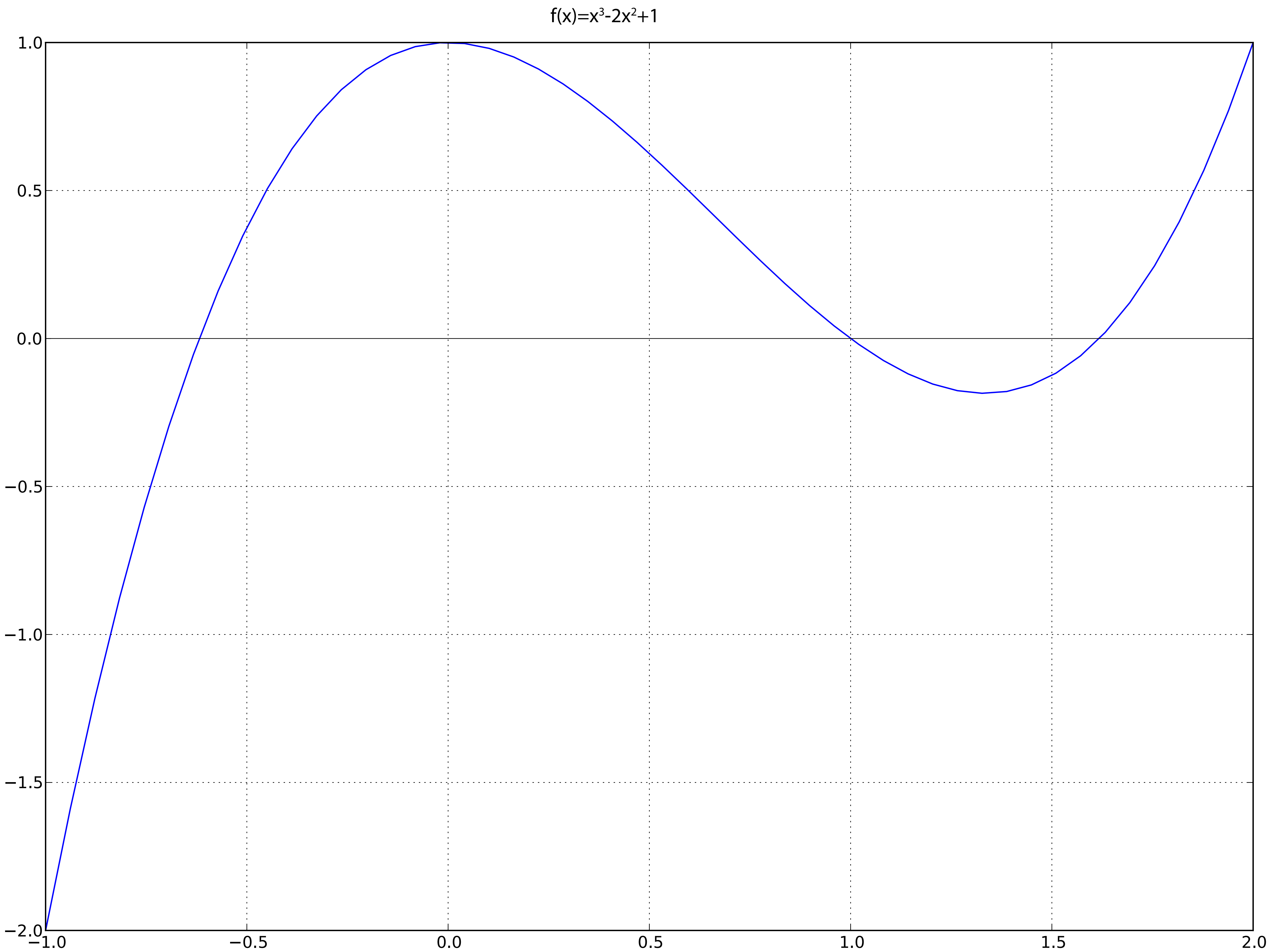
$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}$$

La relation de récurrence s'écrit alors :

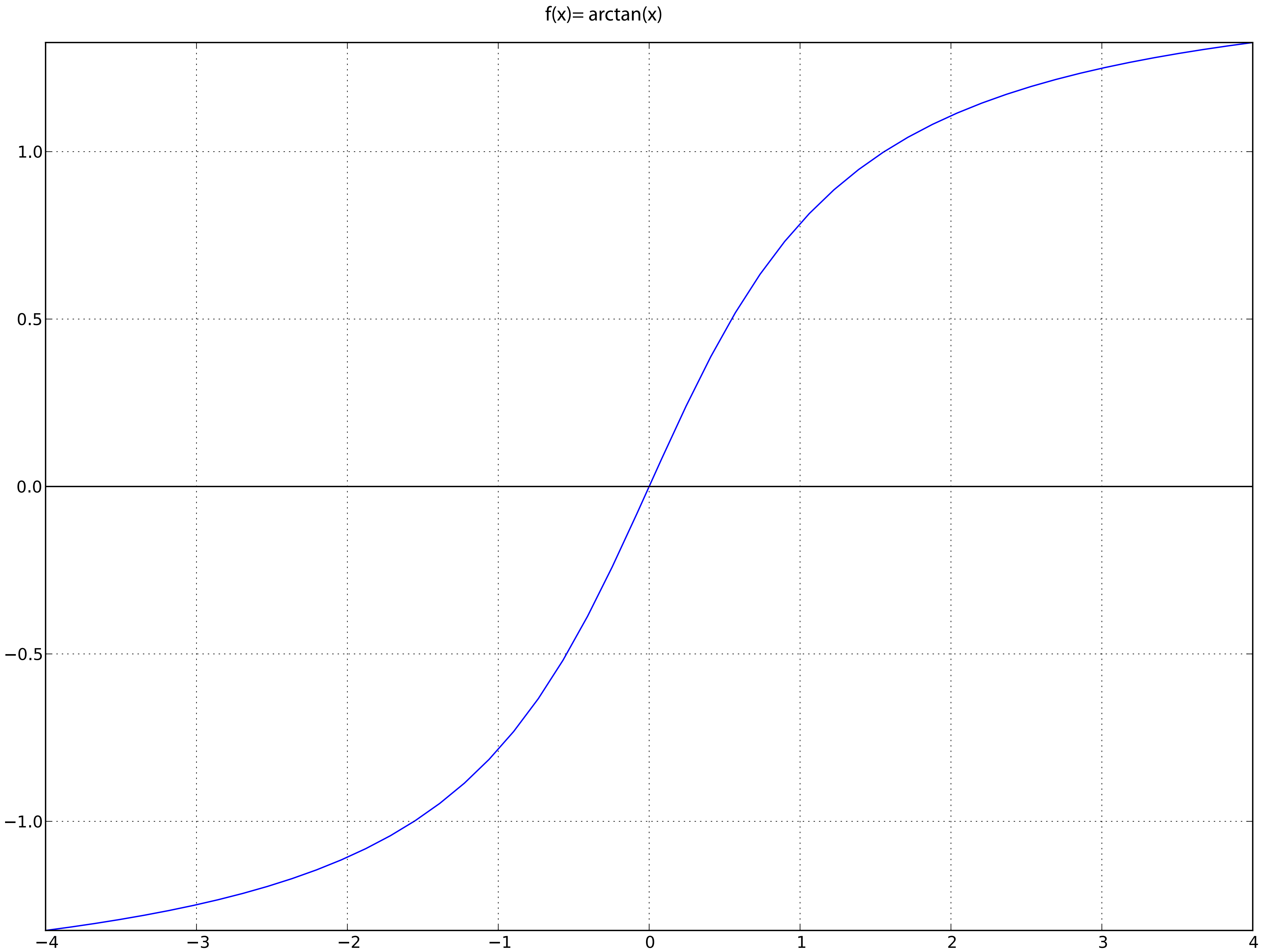
$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} - Df(x, y)_i^{-1} . \begin{bmatrix} f(x_i) \\ f(y_i) \end{bmatrix}$$

Trois racines peuvent être trouvées :

$$(1, 0)$$
$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



f(x)=x³-2x²+1
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0



f(x)= arctan(x)
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4