Algorithmes dichotomiques

1 Introduction

On cherche où est situé une valeur particulière (29) dans la liste ci-dessous.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	5	6	7	9	10	13	15	18	24	25	28	29	31	47

Proposer un programme naïf déterminant l'indice de la valeur 29 dans la liste ci-dessus.

2 Recherche d'un nombre dans une liste triée par dichotomie

- On remarque que la liste est triée par ordre strictement croissant ;
- On peut facilement déterminer dans quelle moitié est la valeur à trouver.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	5	6	7	9	10	13	15	18	24	25	28	29	31	47

0	5	6	7	9	10	13	15	18	24	25	28	29	31	47

0	5	6	7	9	10	13	15	18	24	25	28	29	31	47

0	5	6	7	9	10	13	15	18	24	25	28	29	31	47

3 En langage python :

La fonction ci-dessous utilise la méthode dichotomique pour renvoyer l'indice d'une valeur `x` présente dans une liste `L`.

```python
def recherche_dicho(x,L):
    g = 0
    d = len(L)-1
    while g < d:
        m = (g + d) // 2
        if L[m] == x:
            return(m)
        if L[m] < x:
            g = m
        else:
            d = m
```

4 Applications

4.1 Application 1

Mener à la main la recherche dichotomique afin de trouver l'indice de valeur 19 dans la liste :

1	4	6	7	15	19	24	27	29	32	34	35	38	39	40	43	45

4.2 Application 2

Propose une nouvelle fonction adaptée à une liste ordonnée par ordre décroissant.

5 Méthode par dichotomie appliquée à une fonction

Soit $f(x)$ une fonction strictement monotone sur $[a, b]$ un intervalle contenant une racine de f. On cherche la valeur de cette racine.

5.1 Rappel de la méthode

Le principe est de diviser l'intervalle en deux parts égales, de conserver la partie contenant la racine et d'y reproduire l'opération jusqu'à ce que le critère de convergence soit satisfait.

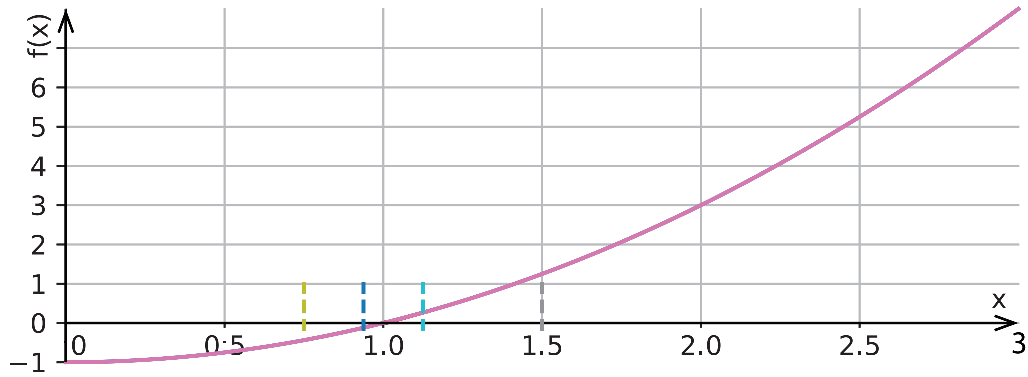

Figure 1 – Méthode de la dichotomie

A partir d'un intervalle donné $[a_i, b_i]$, encadrant une racine de la fonction f étudiée :

- Calculer le point c_i milieu de l'intervalle : $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$
- Evaluer $p_i = f(a_i) \times f(c_i)$
- tester :
  - ⋆ si $p_i = 0$: alors la racine est c_i. (cas numériquement rarissime)
  - ⋆ si $p_i < 0$: la racine est dans $[a_i, c_i]$. On affecte alors à b_{i+1} la valeur de c_i
  - ⋆ si $p_i > 0$: il n'y a pas de racine dans l'intervalle $[a_i, c_i]$. La racine est donc dans l'intervalle $[c_i, b_i]$. On affecte alors à a_{i+1} la valeur de c_i
- test d'arrêt : Evaluer le critère de convergence
  - ⋆ Recommencer si le critère de convergence n'est pas satisfait

5.2 Mise en œuvre

La méthode s'applique :

-
-

Les données nécessaires sont :

Test d'arrêt : précision suffisante sur l'intervalle de la racine : $b_n - a_n \leq 2\varepsilon$
fonction suffisamment proche de zéro : $|f(c_n)| \leq \varepsilon$

5.3 Algorithme

Algorithme

Algorithme 1 : Méthode de la dichotomie

Entrées : f, a, b, ε

$ai, bi \leftarrow a, b$
$ya, yb \leftarrow f(ai), f(bi)$
tant que $bi - ai > 2.\varepsilon$ **faire**
    $ci \leftarrow (ai + bi)/2$
    $yc \leftarrow f(ci)$
    si $ya \cdot yc \leq 0$ **alors**
        $bi \leftarrow ci$
        $yb \leftarrow yc$
    sinon
        $ai \leftarrow ci$
        $ya \leftarrow yc$

Sorties : $\frac{ai+bi}{2}$