MODELISATION LOCALE DES ACTIONS MECANIQUES

1/ Rappels :

1.1/ Définition :

On appelle action mécanique toute cause susceptible de maintenir un ensemble matériel au repos, de créer ou de modifier un mouvement, de déformer un solide.
Les actions mécaniques sont de deux sortes :

- ***Actions à distance*** (action magnétique ou action de la pesanteur) encore appelées actions *volumiques* car elles s'exercent en tout point du système matériel.
- ***Actions de contact*** (action exercée par l'intermédiaire d'une liaison, par la pression d'un fluide, …) encore appelées actions *surfaciques* car elles s'exercent au niveau d'une surface du système.

1.2/ Modélisation des actions mécaniques :

La modélisation des actions mécaniques peut se faire d'un point de vue *local* ou d'un point de vue *global* suivant l'objectif de l'étude envisagée :

- La modélisation locale a pour but d'étudier l'action mécanique dans la zone où elle s'exerce.
- La modélisation globale, par un torseur, caractérise globalement l'action mécanique.

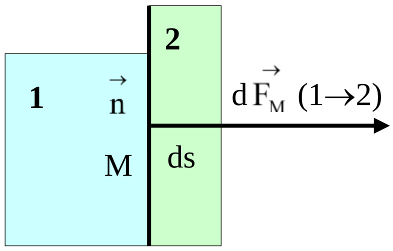
2/ Modélisation d'action de contact:

Dans un premier temps, on se place dans le cas des hypothèses de contacts parfaits.

2.1/ Modélisation locale :

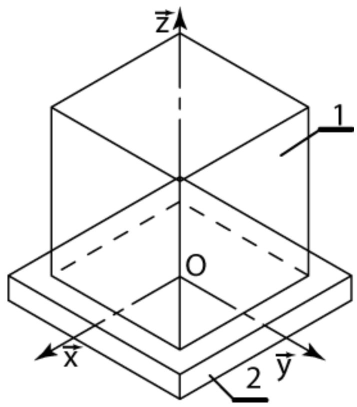
1. Poussée d'un fluide :

On considère un fluide au repos.
En un point M d'une paroi **2** où la pression est p(M), l'action mécanique élémentaire du fluide **1** sur un élément de surface ds de normale unitaire extérieure $\vec{n}$ peut être modélisée par

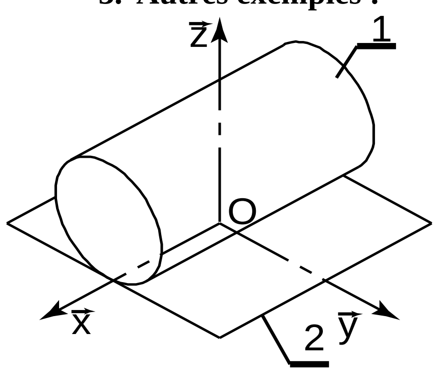


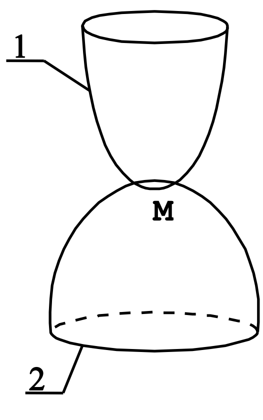
2. Contact entre solides

Les points de contact M, entre le cube **1** et le plan **2**, forment un plan matériel.
En tout point M on peut définir une pression p(M) exprimée en $N.m^{-2}$.
L'action mécanique élémentaire du cube **1** sur un élément de surface dS peut être modélisée par :



3. Autres exemples :



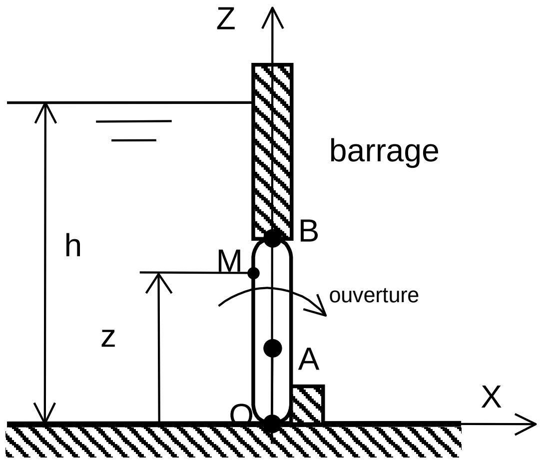


2.2/ Du modèle local au modèle global :

Les actions mécaniques qu'exerce un système matériel **1** sur un système matériel **2** étant représentées par un champ de forces illustré par le vecteur : $d\vec{F}_M\ (\mathbf{1} \to \mathbf{2}) = \vec{f}_M\ (\mathbf{1} \to \mathbf{2}).d\mu$, on peut lui associer, en un point A quelconque, le torseur suivant : $\{F(\mathbf{1} \to \mathbf{2})\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}(1 \to 2) \\ \vec{M}_A(1 \to 2) \end{matrix} \right\}_A$,

avec :

1. Application 1 : Vanne automatique



Le dispositif représenté ci-contre permet d'ouvrir un bassin en cas d'urgence. A partir d'une certaine hauteur d'eau h, la vanne s'ouvre automatiquement sous l'action des forces de pression. Lorsque le niveau de l'eau a baissé, la vanne se referme sans intervention. La vanne a une forme rectangulaire de hauteur $b = 0{,}6\,m$.

La vanne est articulée par rapport au barrage en A tel que $\overrightarrow{OA} = a.\vec{z}$. La largeur du barrage est notée 2L. O est situé dans le plan médian.

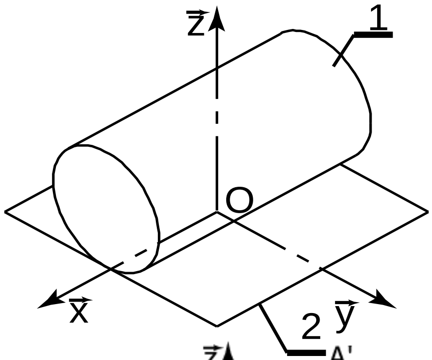
L'eau exerce sur la vanne une action mécanique définie par une densité surfacique d'effort : $f(M) = \rho_e.g.(h - z)$ où ρ_e est la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur.

On donne : $\rho_e = 1\,kg/dm^3$ $g = 9{,}81\,m/s^2$ $a = 0{,}27\,m$

Question 1 : Déterminer en **O** le torseur d'action mécanique exercée par l'eau sur la vanne Est-ce un glisseur ?

Question 2 : Déterminer la position du centre de poussée de l'eau sur la vanne (le centre de poussée est l'intersection de l'axe central du torseur avec la paroi de la vanne). En déduire à partir de quelle hauteur h la vanne s'ouvre. Faire l'application numérique.

2. Application 2 : Cas du contact avec frottement

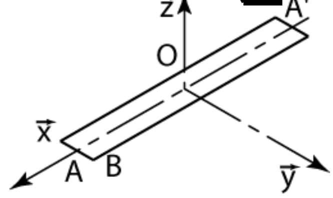


Le contact réel entre un cylindre S_1 et un plan S_2 se fait, à cause d'un léger écrasement, sur un rectangle de longueur $2L$ et de largeur $2e$.

On donne les coordonnées des points suivants : A(L ;0 ;0), A' (-L ;0 ;0) et B(L ;e ;0)

La pression de contact est supposée uniforme : $p(M)=p_0$. Le coefficient de frottement est *f*.

S_1 translate selon $+\vec{y}$ par rapport à S_2.

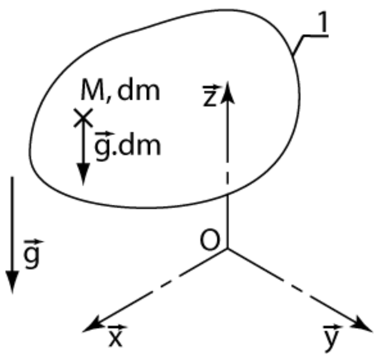


Question 1 : Exprimer l'effort élémentaire en un point M.

Question 2 : Calculer : $\vec{F}(S_2 \to S_1)$, $\overrightarrow{M_O}(S_2 \to S_1)$, $\overrightarrow{M_A}(S_2 \to S_1)$, $\overrightarrow{M_{A'}}(S_2 \to S_1)$, $\overrightarrow{M_B}(S_2 \to S_1)$

3/ Modélisation des actions à distances : la pesanteur

3.1/ Modélisation locale :



Un solide matériel **1** est un système sur lequel est défini la mesure masse. En un point M du solide matériel **1** de masse volumique ρ, soumis à l'attraction terrestre pour laquelle l'accélération de la pesanteur vaut $\vec{g}$, l'action mécanique élémentaire qu'exerce la terre **g** sur l'élément de masse dm(M) peut être modélisée par :

$d\vec{F}_M(\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{1}) = \vec{g}.dm = \rho.\vec{g}.dv$

$\vec{g}$: accélération de pesanteur

ρ : masse volumique de **1** en M

3.2/ Modélisation globale

Le torseur de l'action mécanique de la pesanteur **g** sur un système matériel **1**, de masse m, s'écrit en un point A quelconque :

Remarques :

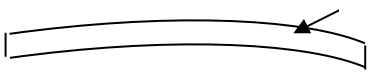
$m = \int dm$ est appelée masse de **1** (unité : kg) ; $\vec{P}$ est appelé poids de **1**.

3.3/ Propriétés de masse et du centre de gravité

1. Rappel de physique

- Un système matériel **E** est à masse conservatrice, si toute partie **e** de **E** conserve une masse constante au cours du temps. $\forall$ **e** $\subset$ **E**, $\forall$ t : m(**e**) = constante.
- Un système matériel **E** est homogène, si sa masse volumique ρ est constante pour tout point M: ρ(M) = constante.

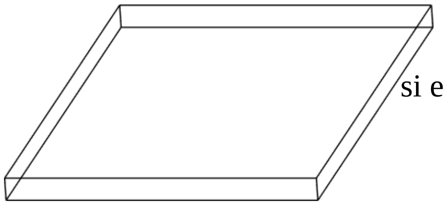
- *Ligne matérielle* (poutre, barre)



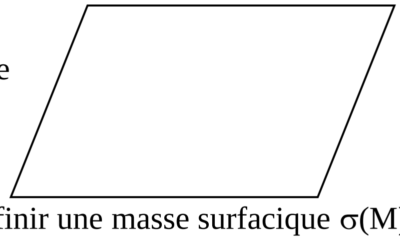
si L ⟩⟩ dimensions de la section

Si on assimile le système à une ligne matérielle alors on peut définir une masse linéique ν(M) ainsi la masse est donnée par : $m = \int_{M\in E} dm = \int_{M\in E} \nu(M).dL$.

- *Surface matérielle* (plaque)



si e ⟨⟨ dimensions de la surface



Si on assimile le système à une surface matérielle alors on peut définir une masse surfacique σ(M) ainsi la masse est donnée par : $m = \int_{M\in E} dm = \int_{M\in E} \sigma(M).dS$.

2. Centre de gravité d'un système matériel :

- Position du centre d'inertie : soit un point O quelconque alors $\int_{M\in E} \vec{GM}.dm = \int_{M\in E} (\vec{GO}+\vec{OM}).dm$

$$\vec{0} = \vec{GO}.\int_{M\in E} dm + \int_{M\in E} \vec{OM}.dm$$

$$\int_{M\in E} dm = m \Rightarrow m\,\vec{OG} = \int_{M\in E} \vec{OM}.dm, \quad \text{d'où :} \quad \vec{OG} = \frac{1}{m}\int_{M\in E} \vec{OM}.dm.$$

- Si **E** est un solide indéformable alors son centre d'inertie est fixe par rapport à tout repère qui lui est attaché.
- Soit une partition de **E**(m,G) en n éléments **E**$_i$(m_i,G_i) alors : $\int_{M\in E} \vec{OM}.dm = \sum_{i=1}^{n} \int_{M\in E_i} \vec{OM}.dm$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m \Rightarrow m\,\vec{OG} = \sum_{i=1}^{n} (m_i\,\vec{OG_i})$$

$$\text{d'où :} \quad \vec{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} (m_i\,\vec{OG_i}).$$

Le point G est le barycentre des centres d'inertie G_i, chacun affecté de la masse m_i de l'élément **E**$_i$.

- Si **E** admet un élément de symétrie matérielle alors son centre d'inertie G appartient à cet élément. Il y a une symétrie matérielle, s'il y a simultanément une symétrie géométrique et une symétrie de répartition de masse.