MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

1/ Actions mécaniques

1.1/ Définition

On appelle action mécanique toute cause susceptible de maintenir un ensemble matériel au repos, de créer ou de modifier un mouvement, de déformer un solide.
Les actions mécaniques sont de deux sortes :

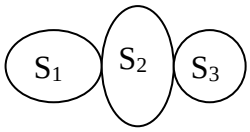
- ***Actions à distance*** (action magnétique ou action de la pesanteur) encore appelées actions *volumiques* car elles s'exercent en tout point du système matériel.
- ***Actions de contact*** (action exercée par l'intermédiaire d'une liaison, par la pression d'un fluide, …) encore appelées actions *surfaciques* car elles s'exercent au niveau d'une surface du système.

1.2/ Modélisation des actions mécaniques

La modélisation des actions mécaniques peut se faire d'un point de vue *local* ou d'un point de vue *global* suivant l'objectif de l'étude envisagée :

- La modélisation locale a pour but d'étudier l'action mécanique dans la zone où elle s'exerce.
- La modélisation globale, par un torseur, caractérise globalement l'action mécanique.

1.3/ Frontière d'isolement



Soient 3 corps S_1, S_2, et S_3

- Si on considère S_2 (on note « on isole S_2»), il est soumis à une action mécanique de S_1 sur S_2, notée $S_1 \rightarrow S_2$ et à une action mécanique de S_3 sur S_2 notée $S_3 \rightarrow S_2$.
- Si on considère l'ensemble $E=\{S_2+S_3\}$ (on note « on isole $E=\{S_2+S_3\}$ »), il est soumis à une action mécanique externe $S_1 \rightarrow E$. $S_2 \rightarrow S_3$ est une action mécanique interne.

2/ Modélisation globale d'une action mécanique

2.1/ Introduction

2.2/ Expression générale

2.3/ Torseur à résultante : Glisseur

Un torseur d'action mécanique est à résultante est un torseur dont le moment en un point A est nul.

$$\{F(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad , \quad \forall\ A \in (\Delta).$$

Propriété :

Exemple 1 :

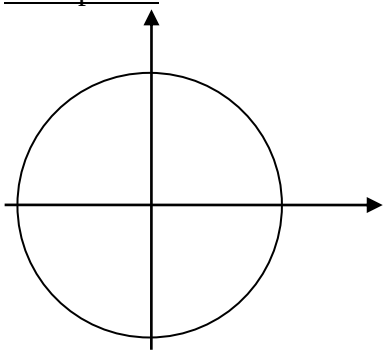
Exemple 2 : le poids

2.4/ Torseur couple :

Un torseur d'action mécanique est un couple si sa résultante est nulle.

$$\{F(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) \end{Bmatrix}_A \quad , \quad \forall\ A.$$

Exemple 1 : deux mains sur un volant :



2.5/ Décomposition d'un torseur quelconque

Une action mécanique quelconque, $\{F(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) \end{Bmatrix}_A$, peut se décomposer en :

3/ Liaisons normalisées sans frottement

Pour toutes les liaisons normalisées entre deux solides **1** et **2** étudiées en cinématiques, déterminons les caractéristiques du torseur d'action mécanique de contact (surfacique, linéique ou ponctuel) que la liaison peut transmettre lorsque le contact est supposé sans frottement, c'est-à-dire qu'en chaque point M de la surface de liaison, la densité surfacique des forces de contact est perpendiculaire au plan tangent au contact.

Le torseur d'action mécanique transmissible du solide **1** sur le solide **2** s'écrit au point O, origine du repère locale associé à la liaison : $\{F(\mathbf{1} \to \mathbf{2})\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \to 2) \\ \vec{M}_O(1 \to 2) \end{Bmatrix}_O$.

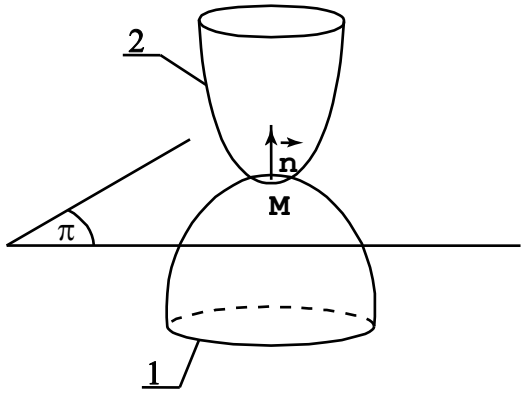
Posons, dans la base du repère local : $\begin{cases} \vec{R}(1 \to 2) = X_{12}\,\vec{x} + Y_{12}\,\vec{y} + Z_{12}\,\vec{z} \\ \vec{M}_O(1 \to 2) = L_{12}\,\vec{x} + M_{12}\,\vec{y} + N_{12}\,\vec{z} \end{cases}$, et écrivons le torseur d'action mécanique de la façon suivante : $\{F(\mathbf{1} \to \mathbf{2})\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.

Suivant la nature de la liaison une ou plusieurs composantes de ce torseur sont nulles et il prend une forme particulière appelée *forme canonique*.

Méthode :

4/ Action mécanique de contact surfacique avec frottement :

4.1/ Position du problème :



Considérons deux solides **1** et **2** en contact au point M et le plan tangent commun (π) aux deux solides **1** et **2**.

Décomposons : $\vec{F}_M\,(\mathbf{1} \to \mathbf{2}) = \vec{n}_M\,(\mathbf{1} \to \mathbf{2}) + \vec{t}_M\,(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$,

avec : $\begin{cases} \vec{n}_M(1 \to 2) \perp (\pi) \\ \vec{t}_M(1 \to 2) \in (\pi) \end{cases}$.

Définitions **:**

- $\vec{F}_M\,(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$: l'action mécanique au point M de **1** sur **2**
- $\vec{n}_M\,(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$: effort ***normal*** des forces de contact au point M de l'action de **1** sur **2**
- $\vec{t}_M\,(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$: effort ***tangentiel*** des forces de contact au point M de l'action de **1** sur **2**

4.2/ Lois de Coulomb :

Notons $\vec{V}$ (M∈**2**/**1**) le vecteur vitesse de glissement, au point M, du mouvement du solide **2** par rapport au solide **1**. Ce vecteur est situé dans le plan (π).

♦ **Premier cas :** $\vec{V}$ (M∈**2**/**1**) ≠ $\vec{0}$ (on dit qu'il y a ***frottement*** au point M entre les solides **1** et **2**)

Interprétation géométrique :
Si on considère l'angle φ, appelé ***angle de frottement***, tel que **f = tg(φ)**, alors la force de contact $\vec{F_M}$ (**1** → **2**) se situe sur le bord du cône de révolution, appelé ***cône de frottement***, de sommet M, d'axe perpendiculaire au plan (π) et de demi angle au sommet φ.
La position de $\vec{F_M}$ (**1** → **2**) est fixée sur le cône de frottement par l'orientation du vecteur vitesse de glissement $\vec{V}$ (M∈**2**/**1**).

♦ **Deuxième cas :** $\vec{V}$ (M∈**2**/**1**) = $\vec{0}$ (on dit qu'il y a ***adhérence*** au point M entre les solides **1** et **2**)

$\left\|\vec{t}_M(1 \to 2)\right\| \leq f_0 \,.\, \left\|\vec{n}_M(1 \to 2)\right\|$, où f_0 est le coefficient d'adhérence des matériaux **1** et **2**.

Interprétation géométrique :
Si on considère l'angle φ_0, appelé ***angle d'adhérence***, tel que $\mathbf{f_0 = tg(\varphi_0)}$, alors la force de contact $\vec{F_M}$ (**1** → **2**) se situe à l'intérieur ou sur le bord du cône de révolution, appelé ***cône d'adhérence***, de sommet M, d'axe perpendiculaire au plan (π) et de demi angle au sommet φ_0.
La position de $\vec{F_M}$ (**1** → **2**) n'est pas connue, a priori, à l'intérieur ou sur le bord du cône d'adhérence.

4.3/ Adhérence et frottement :

La détermination expérimentale des coefficients de frottement et d'adhérence est délicate à cause de l'influence de nombreux paramètres. Toutefois on admet qu'ils dépendent essentiellement de la nature des matériaux en contact.
Le tableau suivant donne des ordres de grandeur des coefficients pour quelques couples de matériaux :

Matériaux en contact	Frottement f	Adhérence f_0
Acier sur acier	de 0,1 à 0,2	de 0,15 à 0,25
Acier sur bronze	de 0,12 à 0,2	de 0,15 à 0,2
Acier sur matériau de friction	de 0,2 à 0,35	de 0,3 à 0,4
Pneu sur revêtement routière	de 0,3 à 0,6	de 0,6 à 1,2

Remarques :

- Le coefficient d'adhérence est toujours supérieur au coefficient de frottement ($f_0 > f$), mais par mesure de simplification, on confond souvent ces deux coefficients.

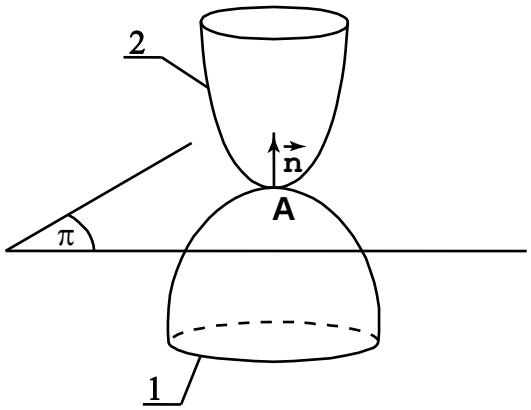
4.4/ Cas général : Résistance aux mouvements

Considérons deux solides **1** et **2** en contact ponctuel en un point A (en réalité, le contact s'effectue sur une petite surface **S** contenant le point A).

Notons (π) le plan tangent commun en A au deux solides et $\vec{f}_M$ (**1** $\rightarrow$ **2**) la densité surfacique des forces de contact en un point M de **S**.

L'action mécanique de contact de **1** sur **2** se représente globalement par le torseur :

$$\{F(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2})\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) \end{Bmatrix}_A$$



Définitions :

- $\vec{N}$ (**1** $\rightarrow$ **2**) : composante normale de la résultante ou ***effort normal***.
- $\vec{T}$ (**1** $\rightarrow$ **2**) : composante tangentielle de la résultante ou ***effort tangentiel***.
- $\vec{M}_A^n$ (**1** $\rightarrow$ **2**) : composante normale du moment en A ou ***moment de pivotement***.
- $\vec{M}_A^t$ (**1** $\rightarrow$ **2**) : composante tangentielle du moment en A ou ***moment de roulement***.

Afin d'énoncer, dans le cas du contact ponctuel, des lois analogues aux lois de Coulomb, considérons au point A la torseur cinématique du mouvement du solide **2** par rapport au solide **1** :

$$\{\vartheta(\mathbf{2}/\mathbf{1})\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) = \vec{\Omega}_n(2/1) + \vec{\Omega}_t(2/1) \\ \vec{V}(A \in 2/1) \end{Bmatrix}_A \text{ ,avec : } \begin{cases} \vec{\Omega}_n(2/1) : \text{vecteur rotation de pivotement} \\ \vec{\Omega}_t(2/1) : \text{vecteur rotation de roulement} \\ \vec{V}(A \in 2/1) : \text{vecteur vitesse de glissement} \end{cases}.$$

- **<u>Glissement</u> :**

  - $\vec{V}(A \in \mathbf{2/1}) \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{T}(1 \to 2) \wedge \vec{V}(A \in 2/1) = \vec{0} \\ \vec{T}(1 \to 2) \bullet \vec{V}(A \in 2/1) < 0 \\ \left\| \vec{T}(1 \to 2) \right\| = f \,.\, \left\| \vec{N}(1 \to 2) \right\| \end{cases}$

  - $\vec{V}(A \in \mathbf{2/1}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left\| \vec{T}(1 \to 2) \right\| \leq f \,.\, \left\| \vec{N}(1 \to 2) \right\|$

f : coefficient de frottement entre **1** et **2**.

- **<u>Pivotement</u> :**

  - $\vec{\Omega}_n(\mathbf{2} / \mathbf{1}) \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{M}_A^{\,n}(1 \to 2) \wedge \vec{\Omega}_n(2/1) = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{\,n}(1 \to 2) \bullet \vec{\Omega}_n(2/1) < 0 \\ \left\| \vec{M}_A^{\,n}(1 \to 2) \right\| = \delta \,.\, \left\| \vec{N}(1 \to 2) \right\| \end{cases}$

  - $\vec{\Omega}_n(\mathbf{2} / \mathbf{1}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left\| \vec{M}_A^{\,n}(1 \to 2) \right\| \leq \delta \,.\, \left\| \vec{N}(1 \to 2) \right\|$

δ : paramètre de résistance au pivotement entre **1** et **2**, δ est homogène à une longueur.

- **<u>Roulement</u> :**

  - $\vec{\Omega}_t(\mathbf{2} / \mathbf{1}) \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{M}_A^{\,t}(1 \to 2) \wedge \vec{\Omega}_t(2/1) = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{\,t}(1 \to 2) \bullet \vec{\Omega}_t(2/1) < 0 \\ \left\| \vec{M}_A^{\,t}(1 \to 2) \right\| = \eta \,.\, \left\| \vec{N}(1 \to 2) \right\| \end{cases}$

  - $\vec{\Omega}_t(\mathbf{2} / \mathbf{1}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left\| \vec{M}_A^{\,t}(1 \to 2) \right\| \leq \eta \,.\, \left\| \vec{N}(1 \to 2) \right\|$

η : paramètre de résistance au roulement entre **1** et **2**, η est homogène à une longueur.