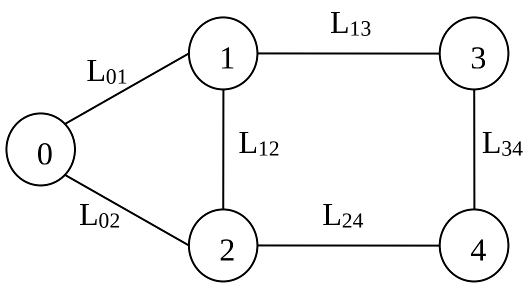
PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

1/ Système matériel et problème de statique

Dans un mécanisme, on note E un système matériel, un ensemble de solides isolés qui font l'objet de l'étude. Le complémentaire de E par rapport à l'univers matériel est noté $\overline{E}$.



Dans un problème de statiques, les objectifs sont :

-
-
-

2/ Principe fondamental de la statique

2.1/ Equilibre d'un système matériel

Un système matériel E est en équilibre par rapport à un repère $\Re$ si au cours du temps, chaque point de E conserve une position fixe par rapport au repère $\Re$.

2.2/ Enoncé du principe fondamental de la statique :

Si un système matériel E est en équilibre par rapport à un repère galiléen, alors le torseur des actions mécaniques extérieures à E soit nul : $\{F(\overline{E} \to E)\} = \{0\}$

2.3/ Théorème généraux de la statique :

Posons : $\{F(\overline{E} \to E)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(\overline{E} \to E) \\ \overrightarrow{M_A}(\overline{E} \to E) \end{Bmatrix}_A$

Théorème de la résultante statique (T.R.S.) : $\vec{R}(\overline{E} \to E) = \vec{0}$

Théorème du moment statique en A (T.M.S.) : $\overrightarrow{M_A}(\overline{E} \to E) = \vec{0}$

2.4/ Condition nécessaire et suffisante

Pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un repère galiléen, il faut que :

- Il soit en équilibre à l'instant initial
- Pour tout sous-système e de E : $\{F(\overline{e} \to e)\} = \{0\}$

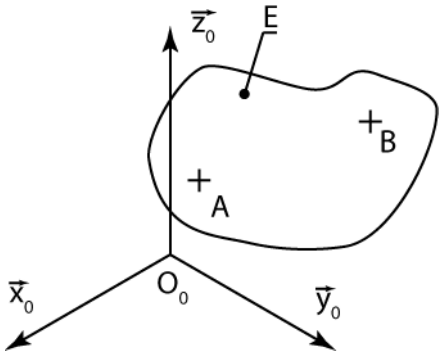
3/ Théorème des actions mutuelles

L'action mécanique d'un système matériel E_1 sur un système matériel E_2 est opposée à l'action mécanique de E_2 sur E_1.

$$\{F(E_1 \to E_2)\} = -\{F(E_2 \to E_1)\}$$

4/ Cas particuliers : Ensemble matériel soumis à l'action de 2 glisseurs

Soit un ensemble matériel E en équilibre par rapport à un repère galiléen sous l'action de deux forces $\overrightarrow{F_A}$ appliquée en A, et $\overrightarrow{F_B}$ appliquée en B.



Le principe fondamental de la statique se traduit par :

$\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = \vec{0}$

$\overrightarrow{F_B} \Lambda \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

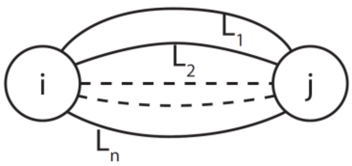
Conclusion : Si un solide en équilibre est soumis à deux glisseurs, alors ces glisseurs sont:

-
-
-

5/ Modèle statique des associations de liaisons

5.1/ Liaison en parallèle

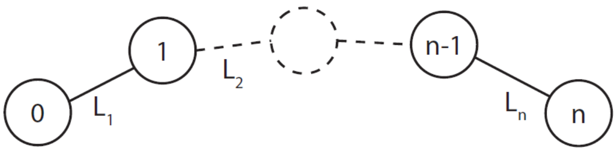
Si deux solides ***i*** et ***j*** sont liés par n liaisons en parallèle, alors le torseur d'action mécanique de la liaison équivalente est la somme des torseurs d'action mécanique de chaque liaison.



$$\left\{\mathcal{F}_{i\to j}^{L_{eq}}\right\} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\mathcal{F}_{i\to j}^{L_i}\right\}$$

5.2/ Liaison en série

Si deux solides en équilibre statique, ***0*** et ***n***, sont liés par n liaisons en série, alors les torseurs d'action mécanique s'égalisent.
de la liaison équivalente est la somme des torseurs d'action mécanique de chaque liaison.

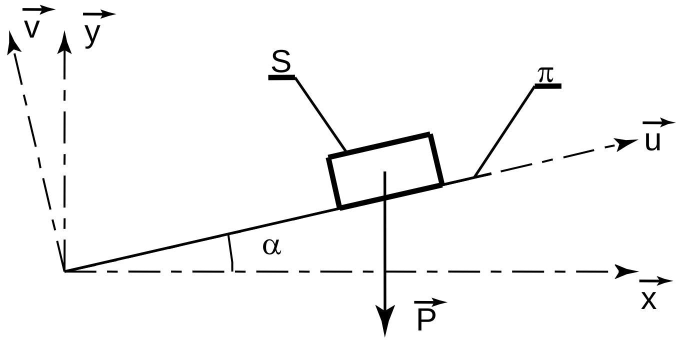


$$\left\{\mathcal{F}_{0\to n}^{L_{eq}}\right\} = \left\{\mathcal{F}_{0\to 1}^{L_1}\right\} = \cdots = \left\{\mathcal{F}_{k-1\to k}^{L_k}\right\} = \cdots = \left\{\mathcal{F}_{n-1\to n}^{L_n}\right\}$$

Les composantes nulles de chaque torseur d'action sont imposées aux autres torseurs.
Les composantes non nulles sont égales.

6/ Cas du frottement

6.1/ Mise en évidence



Soit **S** un solide parallélépipédique de masse M, de centre gravité G, placé sur un plan incliné π, formant un angle α avec l'horizontale.

Lorsque α varie de 0 à 90°, **S** commence à glisser à partir d'un angle limite α_l.

On constate deux comportements:

$\alpha<\alpha_l$: **S** est statique. Il y a adhérence.
$\alpha\geq\alpha_l$: **S** glisse sur π. Il y a frottement. (Pour $\alpha=\alpha_l$, on est alors à la limite du glissement.)

*a) Bilan des actions mécaniques sur **S***

Poids : $\{P_{g\to S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & / \\ -Mg & / \\ / & 0 \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$; Appui-plan : $\{F_{\pi\to S}\} = \begin{Bmatrix} & \\ & \\ & \end{Bmatrix}$

*b) <u>Etude de l'adhérence</u> : déterminons l'action de π sur **S**.*

Théorème de la résultante statique :

En projection sur $\begin{cases} \vec{u} : \\ \vec{v} : \end{cases}$

L'effort tangentiel au contact (l'effort de frottement) ne dépend pas de l'effort normal N.
Il est **déterminé par l'équilibre statique**, c'est-à-dire qu'il se calcule par le *principe fondamental de la statique.*

c) <u>Détermination de la condition géométrique d'équilibre</u>

Hypothèse : à la limite du glissement : |T|=f.|N|

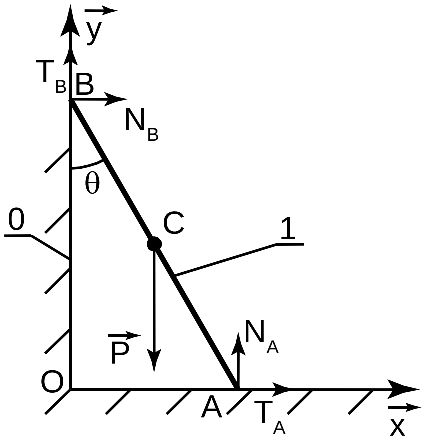
Or $\left|\frac{T}{N}\right| = \frac{M.g.\sin\alpha}{M.g.\cos\alpha} = \tan\alpha_1 = f$, donc $\boxed{f = \tan\alpha_1}$. α_l est égal à *l'angle de frottement*, noté φ.

6.2/ Application : l'arc-boutement

a) Définition

L'arc-boutement caractérise un système à maintenir un **équilibre indépendamment du module des actions extérieures**. (conditions sur la géométrie et non sur la norme des actions).

b) Exemple : échelle sur un mur



Une échelle, de longueur L, est soumise à un poids $\vec{P} = -P.\vec{y}$ en son milieu et à deux forces $\overrightarrow{F_A} = T_A\,\vec{x} + N_A\,\vec{y}$ en A et $\overrightarrow{F_B} = N_B\,\vec{x} + T_B\,\vec{y}$ en B.

<u>Hypothèses</u> :

- non frottement en B : $T_B=0$
- frottement de coefficient *f* en A : $|T_A| \leq f.|N_A|$

Déterminons la ou les conditions d'équilibre statique de l'échelle :
Isolons l'échelle
Bilan des actions mécanique extérieures :

Poids : $\{P_{g\to 1}\} = \left\{ \quad \right\}_C$; $\{F_{0\to 1}\} = \left\{ \quad \right\}_A$; $\{F_{0\to 1}\} = \left\{ \quad \right\}_B$

Théorème de la résultante statique :
en projection Selon $\vec{x}$: $N_B+T_A=0$
en projection Selon $\vec{y}$: $N_A- P= 0$

Théorème du moment statique en A, en projection selon $\vec{z}$:

$$-L.\cos\theta.N_B + \frac{L}{2}\sin\theta.P = 0 \Rightarrow N_B = -T_A = P/2\tan\theta$$

La *loi de Coulomb* indique qu'il y a adhérence (équilibre statique) si $|T_A|<f.|N_A|$.

Or : $\left|\dfrac{T_A}{N_A}\right| = \dfrac{P/2\tan\theta}{P} = \dfrac{\tan\theta}{2} < f$.

Il y a équilibre statique si $\dfrac{\tan\theta}{2} < f$ ou si $\boxed{\theta < \arctan(2.f)}$, quelque soit l'intensité du poids.