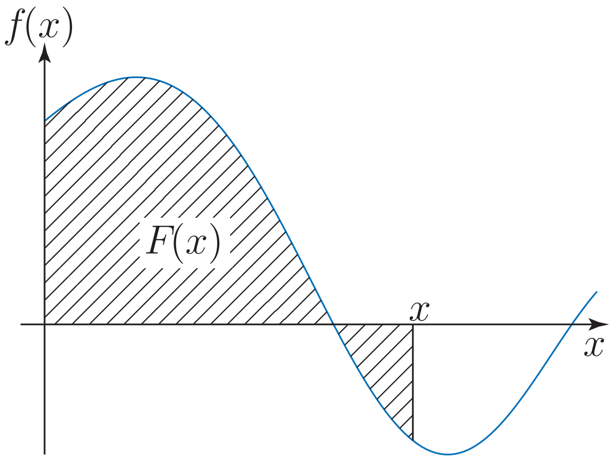
Méthodes numériques : intégration et dérivation

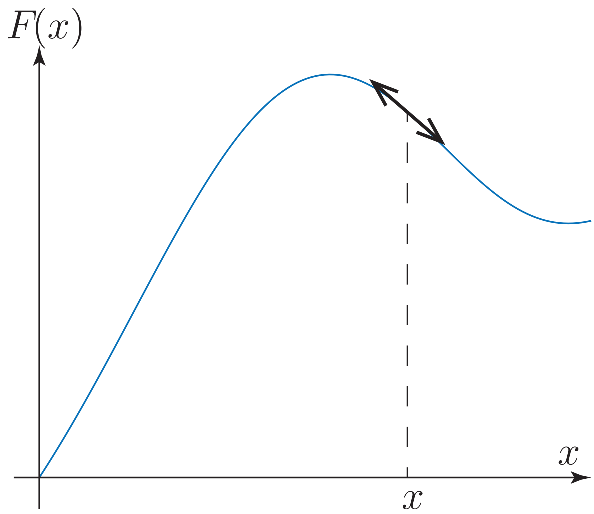
1 Rappels

Soit $x \in \mathbb{R}$
Soient $f(x)$ une fonction bornée et $F(x)$ son intégrale sur $[0; x]$.

$$F(x) = \int_0^x f(\tau) d\tau \Leftrightarrow f(x) = \frac{dF}{dx} \text{ et } F(0) = 0$$



$F(x)$ est l'aire sous la courbe $f(x)$ sur l'intervalle $[0; x]$.

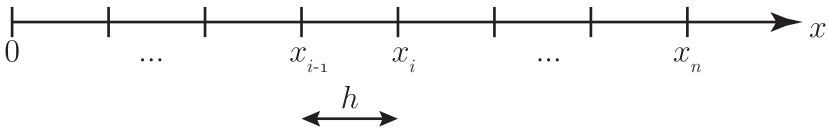


$f(x)$ est la pente de la courbe $F(x)$ au point d'abscisse x.

2 Discrétisation de l'axe des abscisses

Ne pouvant traiter des grandeurs continues, un programme va traiter des grandeurs **discrétisées**. Dans notre cas, l'axe des abscisses est découpés en intervalles réguliers, dits **de pas** h. Seules

les valeurs particulières notées x_i sont traitées.



Pour la suite, on note :

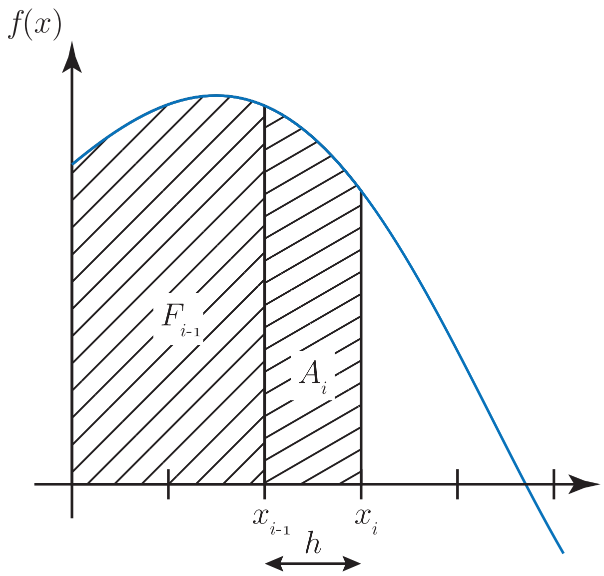
$$\begin{array}{rcl c rcl} F(x_i) & = & F_i & ; & f(x_i) & = & f_i \\ F(x_{i+1}) & = & F_{i+1} & ; & f(x_{i+1}) & = & f_{i+1} \\ F(x_{i-1}) & = & F_{i-1} & ; & f(x_{i-1}) & = & f_{i-1} \end{array}$$

3 Intégration numérique

F_i représente l'aire sous la courbe $f(x)$ sur l'intervalle $[0; x_i]$. Cette aire peut se décomposer en :

$$F_i = F_{i-1} + A_i$$

où A_i représente l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[x_{i-1}; x_i]$.



Différentes méthodes numériques proposent une approximation de A_i (voir table 1).

4 Dérivation numérique

De même, le calcul numérique de la dérivée d'une fonction s'appuie sur une approximation par des différences finies (voir table 2).

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \approx \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

Table 1 – Méthodes d'intégration numérique

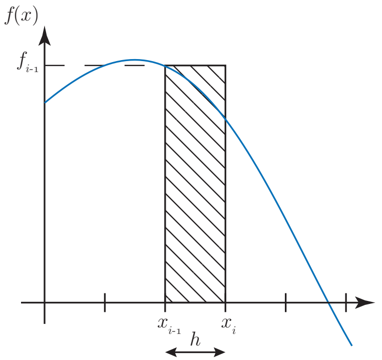
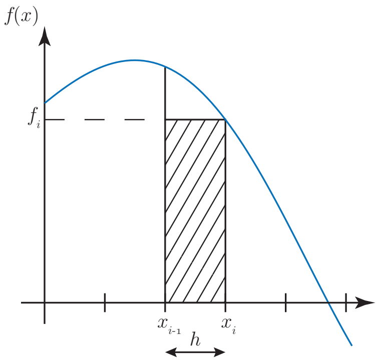
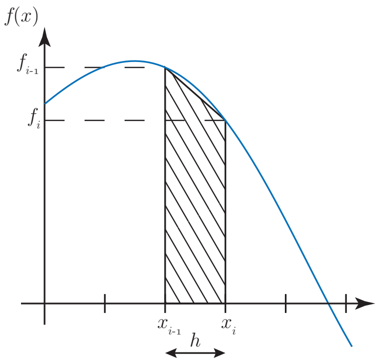
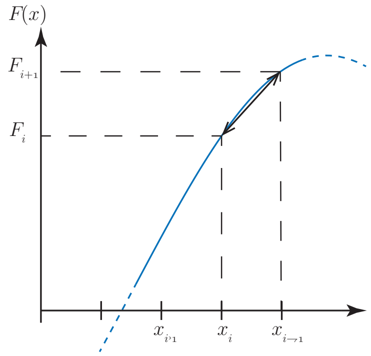
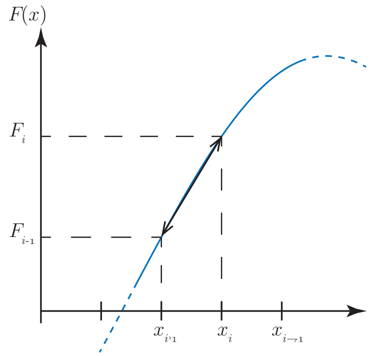
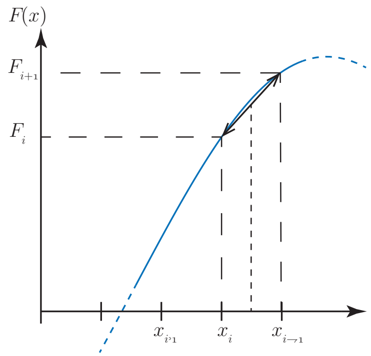
Nom de l'approximation	Figure	Expression de A_i	Equation de récurrence
— rectangle à gauche — Euler avant (*Forward*) — explicite		$A_i \approx h \cdot f_{i-1}$	$F_i = F_{i-1} + h \cdot f_{i-1}$
— rectangle à droite — Euler arrière (*Backward*) — implicite		$A_i \approx h \cdot f_i$	$F_i = F_{i-1} + h \cdot f_i$
— trapèze — Tustin — bilinéaire — Padé d'ordre 2		$A_i \approx h \cdot \dfrac{f_{i-1} + f_i}{2}$	$F_i = F_{i-1} + h \cdot \dfrac{f_{i-1} + f_i}{2}$

TABLE 2 – Méthodes de dérivation numérique

Nom de l'approximation	Figure	Approximation de la dérivée
— Euler avant (*Forward*) — explicite		$$f_i \approx \frac{F_{i+1} - F_i}{h}$$
— Euler arrière (*Backward*) — implicite		$$f_i \approx \frac{F_i - F_{i-1}}{h}$$
— Tustin — bilinéaire — Padé d'ordre 2		$$\frac{1}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right) \approx \frac{F_{i+1} - F_i}{h}$$